Corrigé de l'épreuve définitive du 5 mars 2002

Exercice 1 : Alibis

Andrea est occupée avec Bruce pendant 3 minutes puis avec Dimitri pendant 4 minutes puis par l'appel téléphonique de Camilla pendant 5 minutes.
Elle est donc seule pendant 15 – (3 + 4 + 5) = 3 minutes, ce qui l'innocente.

Bruce est occupé avec Andrea pendant 3 minutes, puis avec Dimitri pendant 3 minutes ; il est donc seul pendant 15 – (3 + 3) = 9 minutes mais on ne connaît pas la durée de son e-mail.

Camilla est occupée jusqu'à 22 h 05 et au cours des 10 minutes restantes, elle est occupée avec Andrea pendant 5 minutes : elle est donc innocentée.

Dimitri voit Andrea après Bruce soit après 22 h 03 et avant le coup de téléphone qu'Andrea reçoit de Camilla soit avant 22 h 10 et Dimitri reste 4 minutes chez Andrea. Il arrive donc chez Andrea au plus tard à 22 h 06, donc il ne peut avoir commis le crime avant sa visite à Andrea ; il quitte Andrea au plus tôt à 22 h 07, il n'a pas pu commettre le crime après sa visite à Andrea car il voit ensuite Bruce pendant 3 minutes.

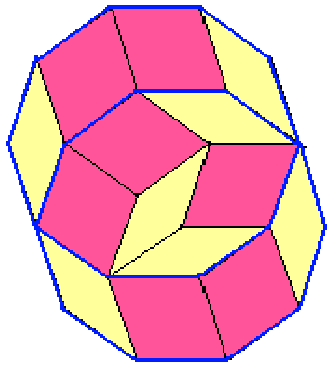
Par élimination, **le coupable est donc Bruce**.

Exercice 2 : Le grand dil

Une des stratégies possibles est d'activer les verrous dans l'ordre **1 – 2 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3**.

Exercice 3 : Décagomanie

Il y a 6 façons d'assembler 5 losanges de chaque sorte pour constituer un décagone.
Voici un exemple de deux décagones imbriqués :



Pour en savoir plus sur les pavages de Penrose, 2 adresses :
http://ourworld.compuserve.com/homepages/gwihen/Penrose.html
http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/1684/Penrose.html

Exercice 4 : A verlan

L'unique solution est

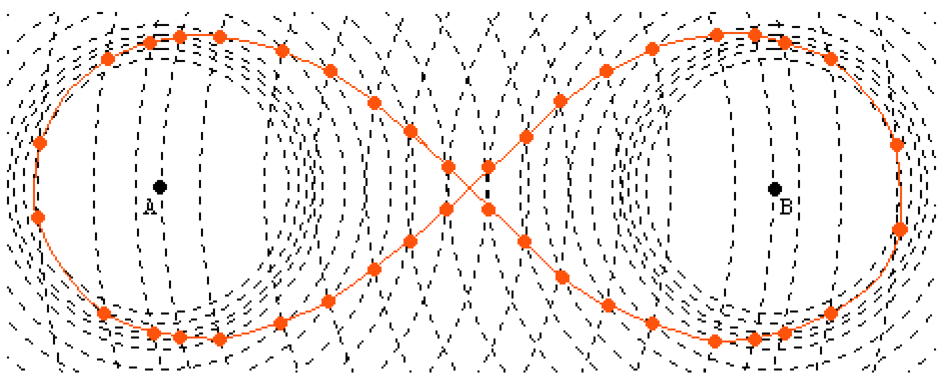
$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 7\ 8 \\ \times \qquad\ \ 4 \\ \hline 8\ 7\ 1\ 2 \end{array}$$

Remarque : *La démonstration de l'unicité est un bon exercice d'arithmétique.*
$a < 3$ soit $a = 1$ ou 2 sinon $abcd \times 4 = dcba$ aurait 5 chiffres (à cause d'une retenue).
Le dernier chiffre du produit $d \times 4$ est pair donc $\boldsymbol{a = 2}$ et $\boldsymbol{d = 8}$. $\Rightarrow$ 2 fins possibles :

- On obtient $2bc8 \times 4 = 8cb2$ soit $(100b+10c+8)\times4=100c+10b+2$ ou $13b+1=2c$ avec $2 < c < 20$. Seule solution : **b = 1**, d'où **c = 7**.
- $b < 3$ car $4b$ ne doit pas donner de retenue. $4 \times 8 = 32$ donc on retient 3. $4c + 3$ est donc impair donc b est impair et égal à 1. $4c + 3 = 11$ ou 31 donc $c = 2$ ou 7. Par vérification, il n'y a que $c = 7$ qui convienne.

Exercice 5 : L'aviatrice

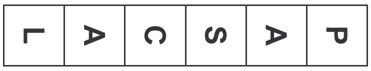
60 x 60 = 3600 ; 72 x 50 = 3600 ; 90 x 40 = 3600 ; 100 x 36 = 3600 ; 144 x 25 = 3600 etc…
Le premier produit donne le milieu de [AB]. Chacun des autres permet de placer 4 points.
Il faut cependant remarquer que l'existence de ces points est soumise à l'inégalité triangulaire, ainsi 20 x 180 = 3600 ne donne rien. En insistant, on voit apparaître **la lemniscate de Bernoulli** :

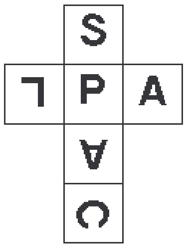


La lemniscate de Jacques BERNOULLI (1654-1705) est un ovale de CASSINI particulier. Elle admet un grand nombre de propriétés. C'est le lieu des points M tels que $MA \times MB = OA^2$ où O désigne le milieu de [AB].

Exercice 6 : Faces cachées

Voici un patron possible et ce que voit Barbara :





Exercice 7 : Pleins pots

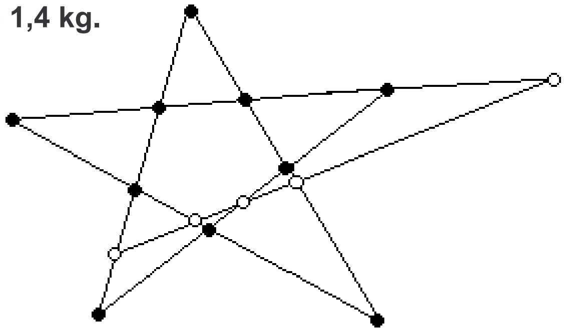
Soient x, y et z les masses respectives d'un petit, d'un moyen et d'un grand pot.
Si on compare l'étagère la plus haute et l'étagère la plus basse, on constate que la masse d'un grand pot plus celle d'un petit est égale à celle de 8 petits pots. Un grand pot pèse donc sept fois plus qu'un petit soit $z = 7x$.
Chaque étagère supporte 2,8 kg (un tiers de 8,4 kg), en considérant les deux étagères du bas, on a donc le système suivant :

$\begin{cases} 2x+4y=2{,}8 \\ 8x+2y=2{,}8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=0{,}2 \\ y=0{,}6 \end{cases}$ puis z = 1,4.

Les pots ont des masses respectives de 0,2 , de 0,6 et de 1,4 kg.

Exercice 8 : L'Europe en lignes

On peut partir d'un pentagone étoilé que l'on complètera en traçant une droite sécante à chacune des droites définies par ce pentagone.

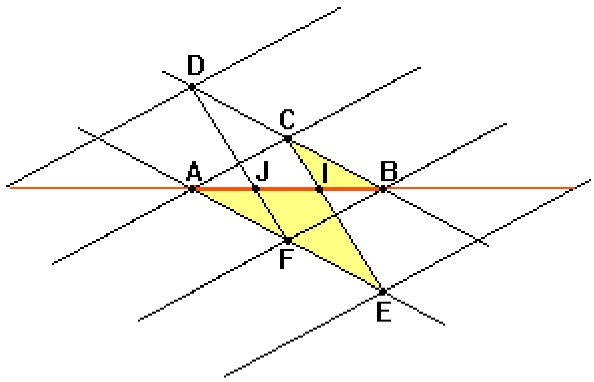


Exercice 9 : D'entiers

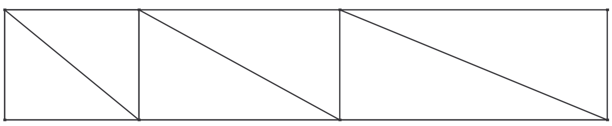
Il suffit de considérer les roues A et B, car si une roue tourne d'une dent, toutes les autres tournent d'une dent. Si les roues A et B ont fait chacune un nombre entier de tours, le nombre de dents ayant défilé est un multiple commun de 14 et 18. PPCM(14;18) = 126 et $\frac{126}{14}$ = 9 et $\frac{126}{18}$ = 7.

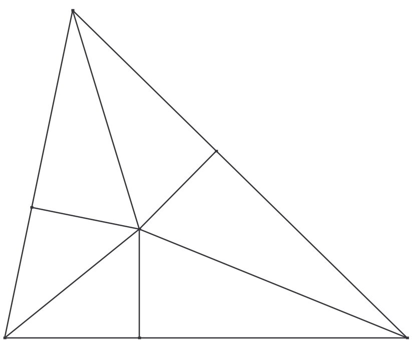
Donc si **A fait 9 tours** alors **B en fait 7**.

Exercice 10 : Tout est en règle



Il y a plusieurs solutions ; en voici une :
Les triangles BIC et AIE sont en situation de Thalès donc $\frac{BI}{AI} = \frac{BC}{AE}$.
Or AE = 2 BC donc AI = 2 IB et **I se trouve aux 2/ 3 de AB**.
De la même façon, on montrera que **J se trouve au 1/ 3 de AB** en considérant les triangles AJF et BJD.





Exercice 11 : C'est Chu

Le triangle est partagé en 6 triangles rectangles qui sont superposables 2 par 2.
On les rassemble 2 par 2 pour former un rectangle dont la largeur est égale au rayon du cercle inscrit et dont la longueur est égale au demi-périmètre du triangle.

D'où l'égalité : $S = R \times \frac{P}{2}$ ce qui donne $R = \frac{2\,S}{P}$.

Remarque :
Cet exercice est une belle démonstration géométrique de la formule donnant le rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction de son périmètre et de son aire.

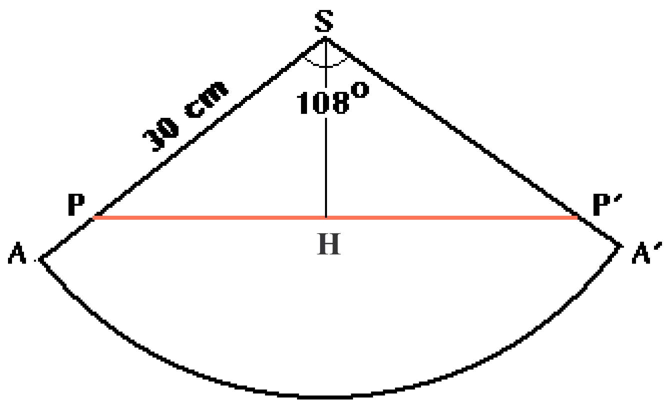
Exercice 12 : Euromate

Pour que 100 opérations soient possibles, quel que soit le change, il faut au départ : 100 billets de 50 € (au maximum 100 changes de 100 €), 100 de 20 € (pour des changes uniquement de 100 € et 50 €), 200 de 10 €, 200 de 5 €.

	100 €	50 €	20 €	10 €	5 €
Nombre de billets **au départ**	0	100	100	200	200
Billets de 100 € introduits	x				
Billets rendus		x	x	2x	2x
Billets de 50 € introduits		y			
Billets rendus			y	2y	2y
Billets de 20 € introduits			z		
Billets rendus				z	2z
Billets de 10 € introduits				t	
Billets rendus					2t
Bilan	x = 20	100+ y-x = 130	100+ z-x-y = 40	200+ t-2x-2y-z = 70	200 -2x-2y-2z-2t = 0
Par résolutions successives, on obtient	x = 20	y = 50	z = 10	t = 20	

Ont donc été introduits : **20 billets de 100 €, 50 de 50 €, 10 de 20 € et 20 de 10 €**.

Exercice 13 : C'est pas du toc



On déroule la surface latérale pour la mettre à plat, obtenant un secteur de disque.

Sur cette surface rectifiée, le chemin le plus court de P à P est le segment de droite [PP'], c'est "la ligne de contact" de la chaînette avec le cône.

Le périmètre de la base est 21π et celui du cercle de centre S et de rayon 35 cm est 70π.

D'où $\widehat{PSP'} = 360° \times \dfrac{21\pi}{70\pi} = 108°$.

La longueur de la chaînette PP' est égale à 2×30 cm $\times \sin(54°)$ soit **environ 48,5 cm** (déterminée grâce au triangle SHP rectangle en H).

Sachant que 2 x sin (54°) est le nombre d'or, c'est une chaînette à 24 carats !