Éléments de solutions pour la correction
de l'épreuve d'entraînement de décembre 2002

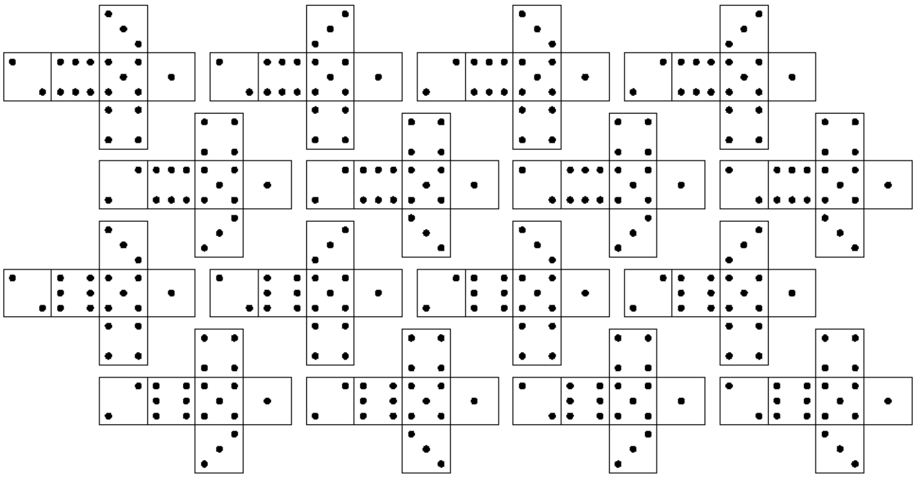
Exercice 1 : Sans perdre la face

Si on colorie une face du ruban, on sera amené à traverser le raccord et finalement c'est le ruban tout entier qui sera colorié. Le ruban de Möbius **n'a donc qu'une face**.
Si on coupe le ruban en suivant sa ligne médiane, **on a la surprise de ne pas obtenir deux morceaux mais une seule boucle**.

Barème proposé : ruban 1 pt ; coloriage + une seule face : 1,5 pt ; découpage + une seule pièce :1,5pt ; expression écrite dans la langue : 3pts.

Exercice 2 : Sans défauts

Chacune des faces 2, 3 et 6 peut être orientée de deux façons différentes ; les faces 3 et 4 peuvent être échangées. En combinant ces variations, on obtient 2×2×2×2, soit 16 dés différents, tous homologués. Voici leurs patrons :



Barème proposé :
0,3 pt par patron correct . Arrondir au ½ pt le plus proche.

Exercice 3 : La vitesse, c'est dépassé

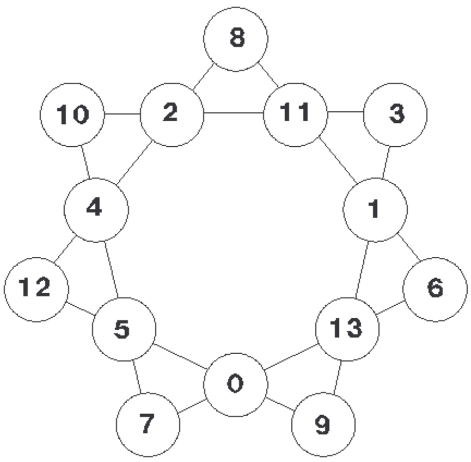
Antoine, cet irresponsable, met 12 minutes de moins que Christine. Comme sa vitesse est ainsi le double de celle de Christine, il mettra deux fois moins de temps qu'elle pour effectuer le trajet soit 12 minutes. Antoine roule donc à 120 km/h et Christine à 60 km/h. Quant à Sylvie et Michel, leurs vitesses respectives sont de 24/30×60=48 km/h et 24/18×60=80 km/h.

autre méthode : $D = 24 = V_S T_S = V_C T_C = V_M T_m = V_A T_A$ *or on sait que* $V_A = 2V_C$ *et* $T_A - T_C = 1/5$ *h (= 12min) d'où* $V_C T_C = 2V_C(T_C - 1/5) \Rightarrow T_C = 2/5$ *et* $V_C = 24/(2/5) = 60$.

Barème proposé :
4pts pour les réponses + 3 pts pour les explications.

Exercice 4 : Heptagone magique

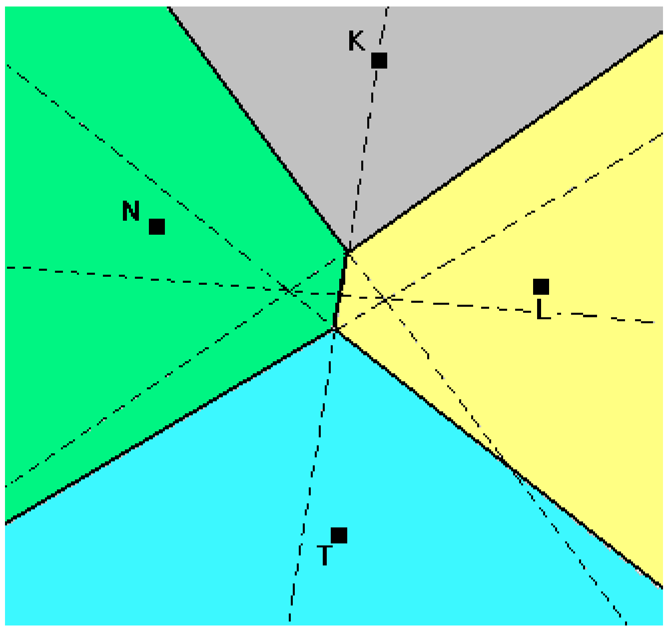
Voici la seule solution :



Barème proposé : 3 pts pour la solution + 2 pts pour l'esthétique du tracé.

Exercice 5 : Contrôle continu

Les frontières des zones sont données par les **médiatrices** qui sont 3 à 3 concourantes. Il faut être soigneux et bien choisir les bonnes frontières en Syldavie centrale :



Barème proposé :
Médiatrices de KT, TL,TN et NK : 4 x 0,5 pt ; Médiatrice de NL : 1pt ; précision des tracés : 1 pt ; choix correct des séparatrices (demi-droites, segment) : 2 pts ; Couleurs et esthétique : 1 pt

Exercice 6 : Tout augmente

Méthode 1 :

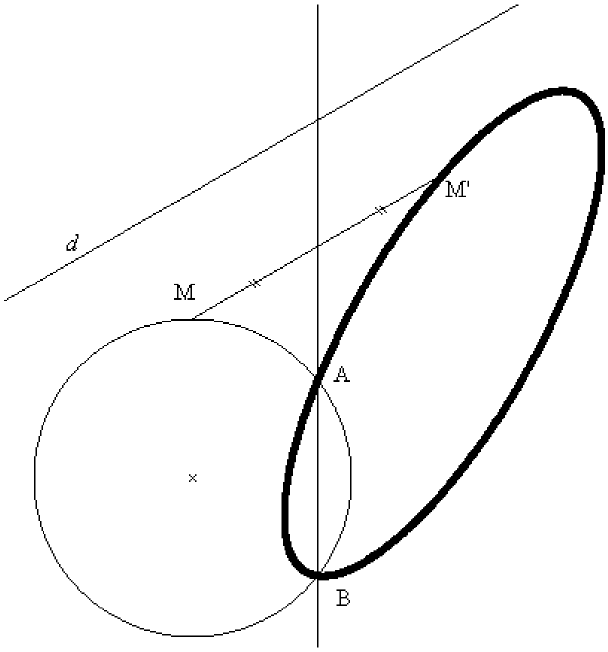
âge d'Hector	50	51	52	…	56	62	68	74	80	81	82	83
Espérance de vie	78	78a2m	78a4m	…	79	80	81	82	83	83a2m	83a4m	83a6m

Méthode 2 : Dans n années, Hector aura ($50 + n$) ans. L'espérance de vie sera de $78 + n/6$ ans.
Si $50 + n = 78 + n/6$ alors $n = 33{,}6$.

Comme l'épreuve d'entraînement a lieu en décembre 2002 ou début 2003, c'est au cours de l'année 2003 + 33 = 2036 qu'aura lieu l'égalité.

Barème proposé :
3 pts pour la réponse 2036 (2 pts pour 2035) + 2pts pour les explications

Exercice 7 : Non conforme



Barème proposé :
Dtes + cercle 1 pt + jusqu'à 4 pts selon le nombre et la répartition des symétriques construits + 2 pts pour le tracé de l'ellipse.

Exercice 8 : Saute-mouton

Il y a 2 solutions en 15 mouvements.
Voici l'une d'elles :

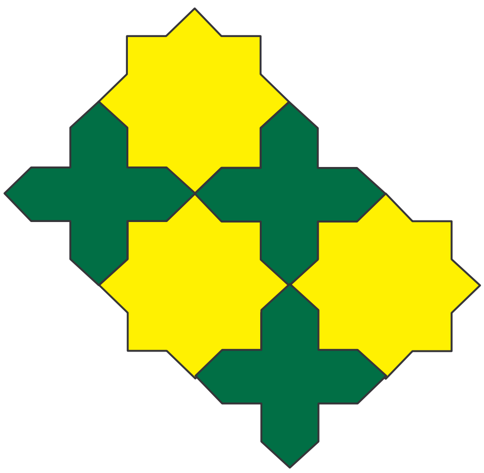
	○	○	○		●	●	●
1	○	○		○	●	●	●
2	○	○	●	○		●	●
3	○	○	●	○	●		●
4	○	○	●		●	○	●
5	○		●	○	●	○	●
6		○	●	○	●	○	●
7	●	○		○	●	○	●
8	●	○	●	○		○	●
9	●	○	●	○	●	○	
10	●	○	●	○	●		○
11	●	○	●		●	○	○
12	●		●	○	●	○	○
13	●	●		○	●	○	○
14	●	●	●	○		○	○
15	●	●	●		○	○	○

L'étape 4 correspond au dessin du sujet.

L'autre est symétrique
Plus généralement, des mathématiciens ont démontré que pour échanger le pâturage de n moutons blancs et n moutons noirs, on fera $n(n+2)$ mouvements dont n^2 sauts et $2n$ translations.

Barème proposé 2 pts pour un échange en plus de 15 actions (avec des reculades) 5pts pour l'une des solutions correctes.

Exercice 9 : Carrelage ligure



Barème proposé : 2 pts pour la pièce complémentaire + 2 pts pour l'agencement + 3 pts pour soin, esthétique et précision.

Exercice 10 : Triangles calés

Hypothèses : ABC équilatéral,

AB = 8, AA' = BB' = CC' = x

Version Thalès : Soit I le milieu de [AB]. Alors [CI] est une hauteur. On a alors les équivalences suivantes :

AA'C' est un triangle rectangle en A'

⇔Les droites (A'C') et (IC) sont parallèles

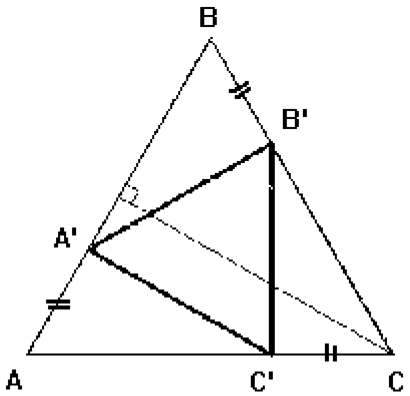
⇔AA'/AI = AC'/AC (condition nécessaire selon Thalès et suffisante selon la réciproque)

⇔x/4 = (8-x)/8 ⇔ 2x = 8-x

⇔ $\boxed{\mathbf{x = 8/3}}$

De même pour les 2 autres triangles.

Il existe d'autres méthodes possibles (trigo , demi-triangle équilatéral…)



Barème proposé : valeur approchée par tâtonnements 2,6 ou 2,7 : 1 pt. Réponse 8/3 non expliquée : 2 pts. Explications rigoureuses : 7 pts à l'appréciation du correcteur. Référence aux 2 autres triangles : 1 pt

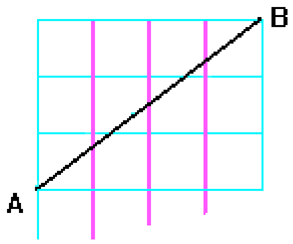
Exercice 11 : La fin justifie les moyens…

Voici les premières puissances de 7 : 1 - 7 - 49 - 343 - 2401 - 16807 - 117649 - 823543 - 5764801 - 40353607 - 282475249 - 1977326743.

On constate pour les deux derniers chiffres la succession périodique de 07, 49, 43 ou 01. Sachant que 2003=4×500+3 alors 7 puissance 2003 aura les même 2 derniers chiffres que 7 puissance 3 soit 43.

Pour aller plus loin : Supposons que 7^{n} finisse par 01, 43, 49 ou 07, alors $7^{n+4} = 7^{n} \times 2401$. Les deux derniers chiffres de 2401 sont 01, par conséquent multiplier un nombre quelconque par 2401 ne modifie pas les deux derniers chiffres de ce nombre. 7^{n+4} a donc les mêmes deux derniers chiffres que 7^{n}.

Barème proposé : 3 pts pour le 43 + 2 pts pour les explications



Exercice 12 : … la faim aussi !

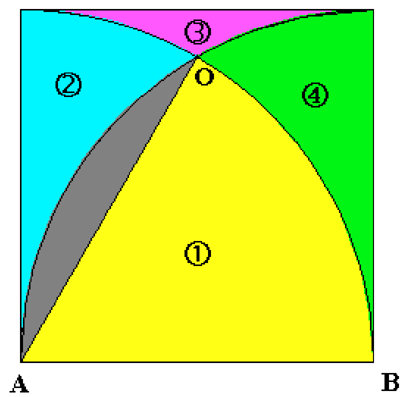
Le chemin de l'escargot peut être segmenté en 4 tronçons chacun se situant dans une bande plane de largeur 0,5 m.

On peut «aplatir » la serre pour représenter ces 4 bandes côte à côte dans un seul plan. Alors le chemin le plus court est représenté par le segment [AB].

Selon Pythagore, sa longueur est 2,5 m.

Barème proposé : autre chemin correctement calculé : 3 pts ; contournement de la serre par l'arrière (≈ 2,58 m) : 2 pts ; chemin correct tracé ou décrit, mais non calculé : 4 pts.

Exercice 13 : Attention fragile.



Aire de la surface grise = $\frac{1}{6}$ aire du disque – aire triangle AOB

$$= \frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Aire ① } = \frac{1}{6}\pi + \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Les pièces ② et ④ ont la même aire ; elles sont symétriques.

$$\text{Aire ② } = \text{Aire ④ } = \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Aire ③ } = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}}$$

Barème proposé : les 10 pts sont à répartir à l'appréciation du correcteur suivant la production de sa classe. -1 si valeurs approchées.