

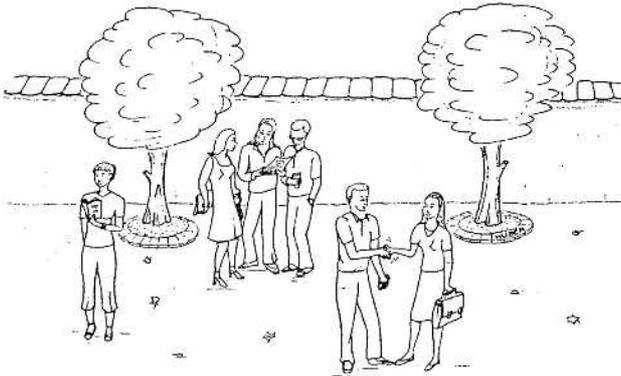
MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

Épreuve du
11 mars 2004

- ✓ Des explications ou des justifications sont demandées pour tous les exercices sauf pour les numéros 6 et 7.
- ✓ Toute solution même partielle sera examinée.
- ✓ Le soin sera pris en compte.
- ✓ Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice 1 - 7 points

Bonjour !



6 persone si incontrano. Alcune si danno la mano per salutarsi.
Naturalmente, nessuno saluta se stesso o saluta due volte la stessa persona.

Dimostrare che in tutti i casi vi sono almeno due persone che stringono lo stesso numero di mani.

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

6 people meet. Some of them shake hands to say hello. Of course, no one says hello to himself and people don't greet the same person twice!

Prove that in any case at least two persons have shaken the same number of hands.

6 Personen treffen sich. Einige geben sich zur Begrüßung die Hand.
Natürlich begrüßt niemand sich selbst und begrüßt auch nicht mehr als einmal die selbe Person.

Zeige, dass es in jedem Fall mindestens zwei Personen gibt, welche die gleiche Anzahl von Händen geschüttelt haben.

6 personas se encuentran. Algunas se estrechan la mano para saludarse.
Por supuesto, nadie se saluda a sí mismo y uno no saluda dos veces a una misma persona.

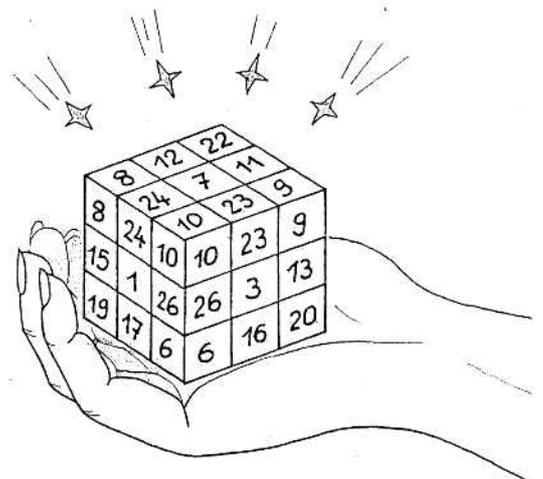
Demuestra que en todos los casos, hay por lo menos dos personas que han estrechado el mismo número de manos.

Exercice 2 - 5 points

Centre de calculs

Le dessin ci-contre représente un cube formé par des petits cubes numérotés de 1 à 27. Ce grand cube est extraordinaire, car sur chacune des 6 faces la somme de chaque colonne et de chaque ligne est toujours égale à un même nombre.

Quel est le numéro du cube central ? Indiquer la démarche.

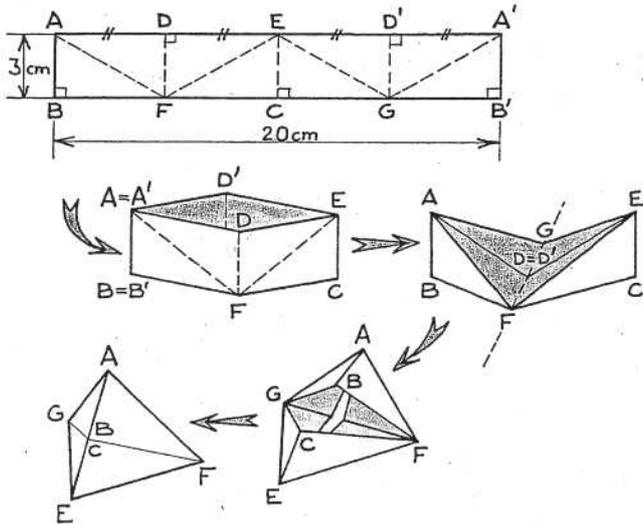


Exercice 3 - 7 points

Pyramide

Avec une bande de papier de dimensions 20 cm x 3 cm et un peu de ruban adhésif, il est possible de confectionner un tétraèdre comme indiqué sur la figure ci-dessous.

On pourra faciliter les articulations en marquant les plis au préalable. La charnière FG devra fonctionner dans les deux sens.



Réaliser un tel tétraèdre, puis présenter sur la feuille-réponse une façon astucieuse de calculer son volume.

Exercice 5 - 7 points

Boum

2 circuits circulaires \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de même rayon passent chacun par le centre de l'autre et se coupent en A et B.

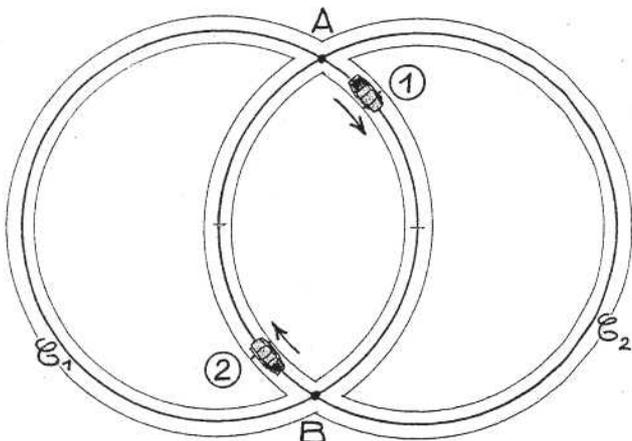
La voiture ① tourne à vitesse constante sur la piste \mathcal{C}_1 . Elle effectue le tour en 1 min 12 s.

La voiture ② tourne à vitesse constante sur la piste \mathcal{C}_2 . Elle effectue le tour en 1 min 15 s.

Les deux voitures tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.

À l'instant initial, la voiture ① passe au point A et la voiture ② au point B.

Dans combien de temps y aura-t-il collision ? Justifier la réponse.



Exercice 4 - 5 points

Tour de passe-passe

Pour fêter un anniversaire, dix amis sont assis autour d'une table sur laquelle est posée une assiette avec 18 gâteaux.

Adrien prend l'assiette sans se servir et la passe à l'un de ses voisins qui prend un gâteau. L'assiette entame un tour de table. Celui qui reçoit l'assiette ne prend qu'un gâteau à la fois et la passe à l'un de ses voisins.

Adrien voit l'assiette circuler et changer 2 fois de sens. L'assiette revient pour la première fois à Adrien qui prend le dernier gâteau.

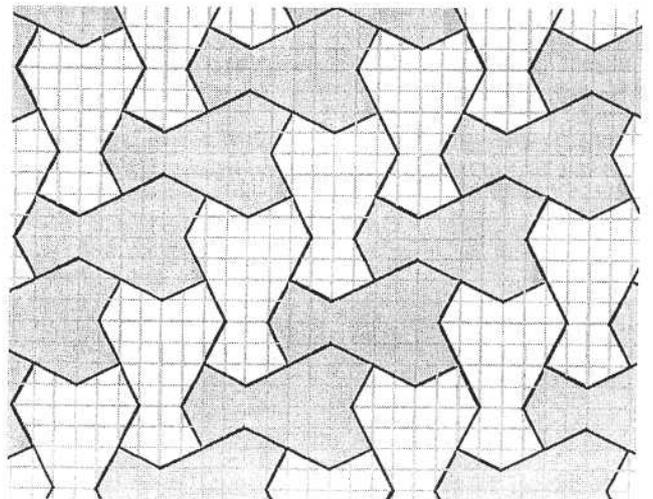
Combien de personnes ont mangé un seul gâteau ? deux gâteaux ? etc. Justifier la réponse.



Exercice 6 - 5 points

Qui se ressemble ...

Voici ci-dessous un pavage formé de pavés tous identiques, chacun ayant 10 côtés.



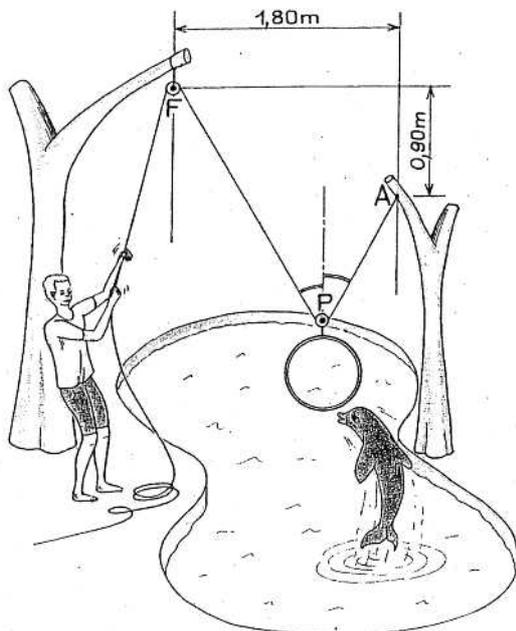
Les pavés sont juxtaposés suivant deux directions, matérialisées par les couleurs.

Inventer un pavé de 16 côtés qui permet de réaliser un pavage du même type, puis présenter ce pavage sur du papier quadrillé que l'on collera sur la feuille-réponse.

Exercice 7 - 7 points

Flipperbole

Robert soulève le cerceau à l'aide du système représenté ci-dessous.



Il tire sur une corde qui passe sur une poulie fixe F et une poulie mobile P et qui est attachée au point fixe A en son extrémité.

Le cerceau est fixé à la poulie P qui répartit la tension de la corde sur (PA) et (PF) de sorte que la bissectrice de l'angle FPA reste verticale.

Les dimensions du dispositif sont indiquées sur la figure. On voudrait connaître la trajectoire de la poulie P.

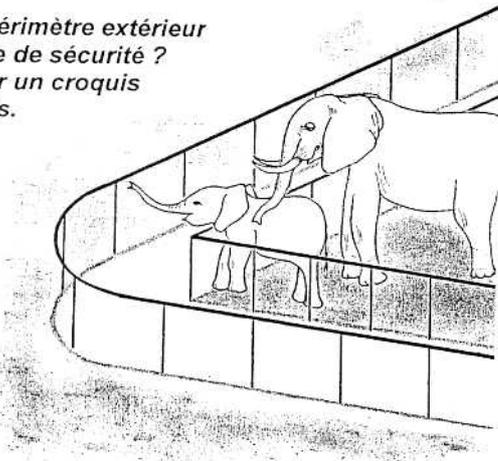
Sur un schéma à l'échelle 1/10, dessiner plusieurs positions successives de P, puis relier ces points pour faire apparaître la courbe décrite par P quand Robert tire sur la corde.

Exercice 9 - 7 points

Périmètre de sécurité

Dans un zoo, l'enclos des éléphants a la forme d'un trapèze rectangle dont le périmètre est 400 m. Pour des raisons de sécurité, il faut prévoir autour de l'enclos une zone inaccessible aux visiteurs. La limite de cette zone est à 3 m de l'enclos.

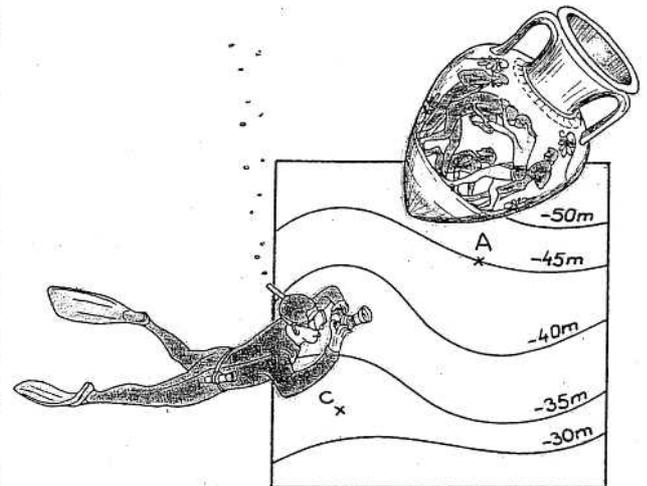
Quel est le périmètre extérieur de cette zone de sécurité ? Expliquer par un croquis et des calculs.



Exercice 8 - 5 points

Calcul profond

Le dessin ci-dessous représente une carte au 1/500 des fonds marins.



Le relief sous-marin est représenté par des lignes de niveau qui expriment la profondeur en mètres. Une amphore, représentée par le point A, repose sur le fond. Colin fait de la plongée sous-marine et nage à 25 m de profondeur. Il est localisé sur la carte par le point C.

A l'aide de cette carte, calculer la distance entre Colin et l'amphore.

Exercice 10 - 10 points

Partages isocèles

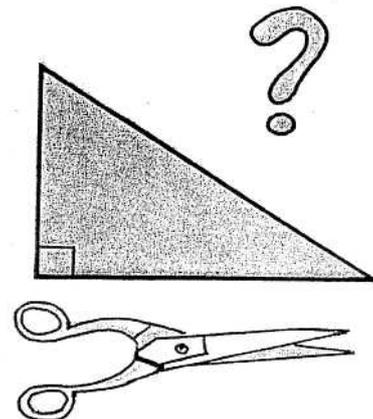
Gérard sait partager n'importe quel triangle rectangle en n'importe quel nombre de triangles isocèles.

Montrer comment on peut partager un triangle rectangle

- en 2 triangles isocèles
- en 3 triangles isocèles
- en 4 triangles isocèles
- en 5 triangles isocèles

Présenter chaque découpage à partir d'un triangle rectangle de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm.

Décrire une stratégie permettant de découper un triangle rectangle en 13 triangles isocèles.



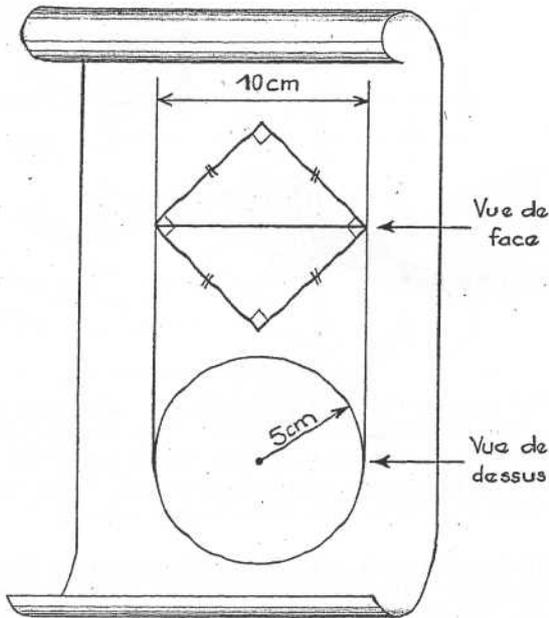
SPECIAL SECONDE

Exercice 11 - 5 points

Bicône

Voici une vue de face et une vue de dessus d'un solide.

Construire un patron de ce solide. Présenter les calculs nécessaires.



Exercice 13 - 10 points

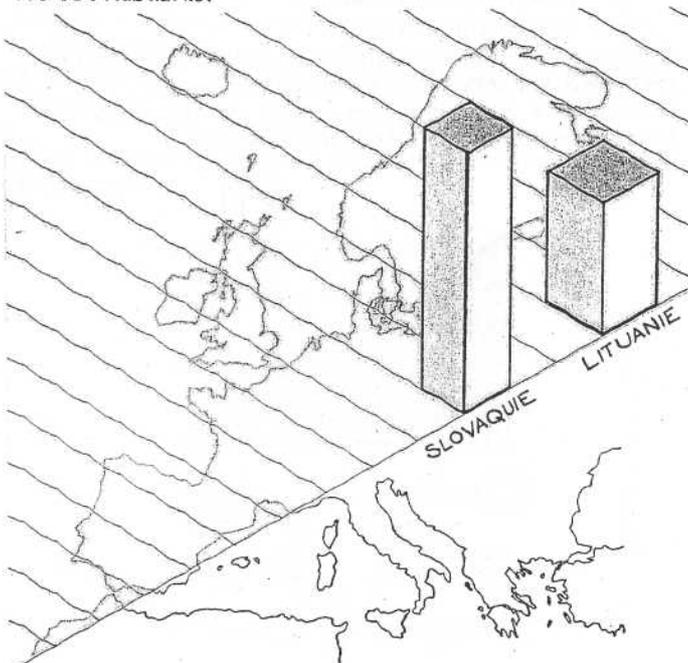
Bienvenue !

Dans un article sur l'élargissement de l'Union Européenne, Julien a trouvé le tableau suivant concernant les 10 nouveaux pays membres.

Il se propose alors de représenter chaque pays par un pavé droit à base carrée tel que :

- l'aire de la base de chaque pavé soit proportionnelle à la superficie du pays qu'il représente
- et son volume soit proportionnel à la population du pays.

Il prend un carré de 1 cm de côté pour représenter une superficie réelle de 10 000 km² et 1 cm³ de volume pour représenter 100 000 habitants.



Calculer les dimensions des pavés pour Chypre, l'Estonie, la République Tchèque, la Pologne et Malte. Dessiner en perspective les pavés représentant Chypre, l'Estonie, la République Tchèque et la Pologne. Quelle caractéristique démographique est illustrée par les hauteurs des pavés de Julien ?

Pays	nombre d'habitants	superficie en km ²
Chypre	800 000	9 251
Estonie	1 380 000	45 227
Hongrie	10 320 000	93 036
Lettonie	2 390 000	64 589
Lituanie	3 620 000	65 300
Malte	390 000	316
Pologne	38 660 000	312 683
République Tchèque	10 310 000	78 864
Slovaquie	5 420 000	49 032
Slovénie	1 940 000	20 256

Exercice 12 - 7 points

Et en plus, ça s'évapore

Un récipient pyramidal de hauteur 1,20 m est posé sur son sommet, sa base carrée, de côté 1 m, est horizontale. Il est alimenté au goutte à goutte par un robinet dont le débit est 1 litre par 24 heures.

L'eau recueillie s'évapore : cette perte est proportionnelle à la surface libre du liquide. Pour 1 m² cette perte est de 0,05 litre par heure. Ainsi le récipient se remplit jusqu'à une certaine hauteur pour laquelle l'apport dû au robinet et la perte due à l'évaporation se compensent.

Calculer cette hauteur.

