Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de Février 2009

Exercice 1 : *Rythme de croisière, 7 points*

Soit *n* la durée des vacances en jours.
Le livre compte donc *30n* pages.
La moitié du livre est constituée de *15n* pages. Si Pierre lit *15* pages par jour jusqu'à la moitié, il lui faudra *n* jours pour cette moitié et ses vacances seront finies !

En revanche, s'il lit 15 pages par jour pendant la ***première moitié des vacances*** *et 45 pages par jour pendant la seconde moitié, il arrivera à finir son livre. (Cette remarque n'est pas attendue des élèves.)*

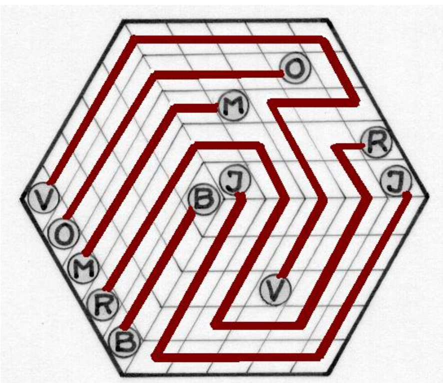
Exercice 3 : *Sommes grillées, 7 points*

2	7	1	3	13
3	8	7	9	27
1	9	3	8	21
6	24	11	20	

2	7	1	3	13
3	9	7	8	27
1	8	3	9	21
6	24	11	20	

La somme 6 de la 1ère colonne est minimale et impose le contenu 1, 2, 3 de cette colonne.
Le total 27 de la 2ème ligne fixe la position du 3 et impose le contenu complémentaire 7, 8, 9.
De même le total de la 2ème colonne impose son contenu 7, 8, 9 et la somme de la 1ère ligne fixe la position du 7. Des essais montrent qu'il n'y a, finalement, que deux solutions.

Exercice 4 : *Interconnexions, 5 points*



Exercice 6 : *20 ans déjà, 5 points*

On peut passer de 1989 à 2009 en 5 étapes.
Par exemple :
1 989 ; 1 089 ; 1 189 ; 2 189 ; 2 109 ; 2 009

Exercice 2 : *Chat va vite, 5 points*

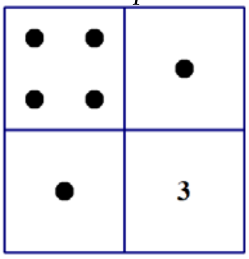
(7+7)×7×7+7+7 = 700

Le chat botté se rend de Strasbourg à Kazan en 2 enjambées simples, suivies de 2 super-enjambées et 2 enjambées simples pour finir.

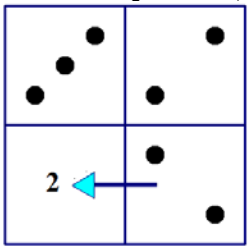
On n'attend pas que les élèves démontrent que c'est la solution optimale. On a $700 = 2\times7^3 + 2\times7$.

Exercice 5 : *Rubikdé, 7 points*

1. *La face arrière est déterminée, le « 3 » n'est pas orienté.*

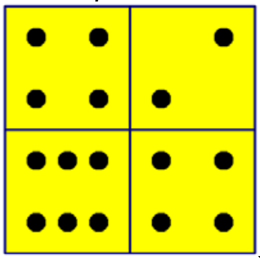


2. *Face latérale gauche (1er cas)*

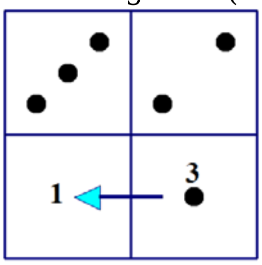


Cette face est un « 2 », alors la face voisine est aussi un « 2 ».

3. *On en déduit la face du dessous (1er cas)*

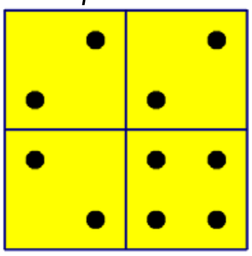


4. *Face latérale gauche (2ème cas)*

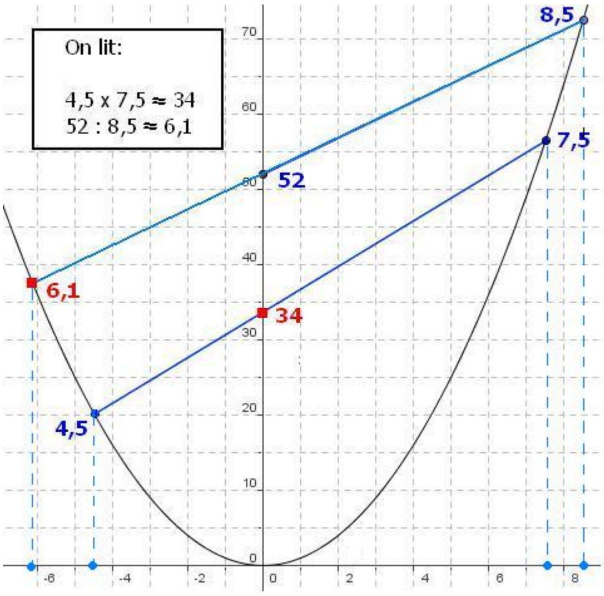


Cette face est un « 3», alors la face voisine est aussi un « 1 ».

5. *On en déduit la face du dessous (2ème cas)*

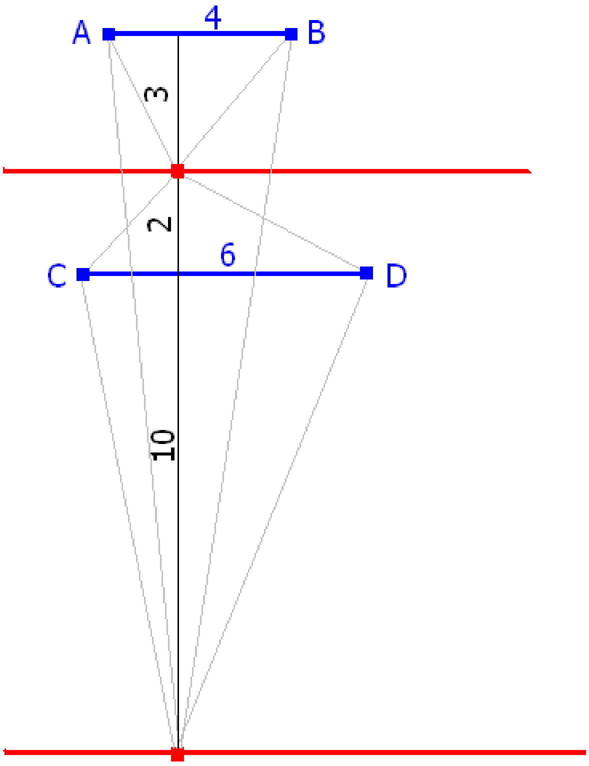


Ex 7 : *Multiplication parabolique, 7 points*



On ne demande pas de démontrer la propriété observée. Toutefois, voici comment on pourrait la justifier :
Soit y=mx+p l'équation d'une droite qui coupe la parabole. L'équation $x^2 = mx+p$ s'écrit aussi $x^2-mx-p=0$. Donc p est l'opposé du produit de ses solutions.

Exercice 9 : *C'est dans l'aire, 7 points*



L'ensemble des solutions est la réunion de deux droites.
Si l'on note h la hauteur du triangle CMD, les positions de ces droites sont données par les solutions des équations :

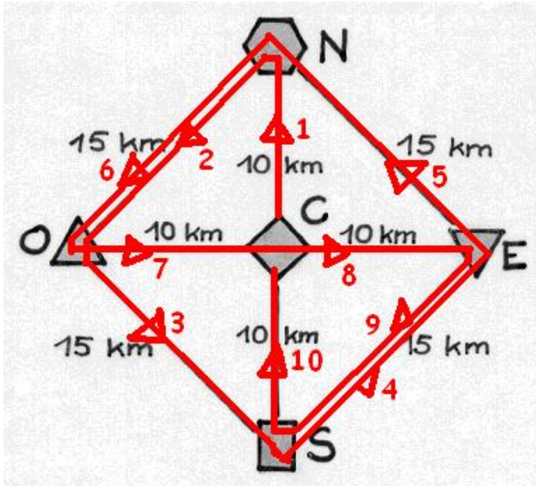
6h/2 = 4(5-h)/2 et 6h/2 = 4(5+h)/2

soit **h = 2** et **h = 10**

(L'équation 6h/2 = 4(h-5)/2 ne donne rien, parce que sa solution est négative)

Exercice 8 : *Au plus court, 5 points*

Voici une solution possible.
La distance minimale est de 130 km.



(On peut prouver qu'un tel parcours est minimal comme suit :
N, E, S et O sont chacun aux extrémités d'au moins 3 tronçons du parcours, mais étant des points de passage, ils sont nécessairement aux extrémités d'un nombre pair, donc de 4 tronçons au moins.
Le doublement des segments NO et SE - ou de NE et SO - permet alors d'économiser les segments parcourus deux fois, puisque la liaison double est commune à deux sommets du carré). Cette preuve n'est pas attendue des élèves.

Exercice 10 : *Couper-coller, 10 points*

Soient *n* et *x* les dimensions du rectangle initial.
Il y a *n* bandes de *x* cm et *n*-1 raccords de 1cm pour 400 cm de longueur totale.

On a : $nx - (n-1) = 400$

d'où $n(x-1) = 399$

et donc les cas suivants : voir tableau.

n	*x*–1	*x*
1	399	400
3	133	134
7	57	58
19	**21**	**22**
21	**19**	**20**
57	7	8
133	3	4
399	1	2

La limitation à une feuille A4 restreint le nombre de solutions à deux :

***n* = 19 *x* = 22** ou ***n* = 21 *x* = 20**

Spécial Seconde

Exercice 11 : ***Tétraèdre équifacial, 5 points***

Soient M, N P les milieux des côtés du triangle ABC.
Quand on relève les faces latérales du tétraèdre, les projetés de leurs pointes sur le plan de base se déplacent sur des droites respectivement perpendiculaires aux axes de rotation (NP), (MP) et (MN) de ce mouvement, jusqu'à se rejoindre en H, le projeté du sommet S du tétraèdre.
Sachant que (NP), (MP) et (MN) sont chacun parallèle à un côté du triangle, leurs perpendiculaires (AH), (BH) et (CH) sont les hauteurs du triangle ABC, donc

H est l'orthocentre du triangle ABC.

Justification non demandée !

Exercice 12 : ***Clair-obscur, 7 points***

La somme des aires des carrés sombres est : $AJ^2 + BK^2 + CL^2$.
Selon le théorème de Pythagore elle peut aussi s'écrire :
$(MA^2 - MJ^2) + (MB^2 - MK^2) + (MC^2 - ML^2)$ ou : $\boxed{MA^2+MB^2+MC^2 - (MJ^2+MK^2+ML^2)}$
De même la somme des aires des carrés clairs est :
$AL^2+CK^2+BJ^2 = MA^2-ML^2+MC^2-MK^2+MB^2-MJ^2 = \boxed{MA^2+MB^2+MC^2 - (MJ^2+MK^2+ML^2)}$
Ces deux sommes sont égales.

Exercice 13 : ***Vide-carré, 10 points***

L'aire du premier carré est 64 cm².
On le découpe en 4 parts égales.
L'aire du carré central de la 2ème figure est donc 16 cm², donc son côté est 4 cm.
On a alors le système : $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$
La solution est $x = 6$ *et* $y = 2$.
Elle donne le bon découpage.