Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 16 mars 2012

Exercice 1 – *Sans doute*, 7 points

Une année compte 365 ou 366 jours. Dans le pire des cas, on peut avoir 366 jours anniversaires différents, mais s'il y a plus de 400 habitants dans le village de Nicole, il est sûr que deux personnes ont leur anniversaire le même jour.

Avec 4 chiffres, on a 10^4 possibilités pour composer un code PIN. Pour 10 millions de téléphones, il y a donc au moins $\frac{10^7}{10^4}$, soit 10^3 propriétaires qui utilisent le même code pour leur téléphone. Comme ils sont plus de 366, parmi eux, il y en a forcément deux au moins qui ont aussi leur anniversaire le même jour.

Exercice 2 – *Dans tous les sens*, 5 points

Le plus grand nombre à 5 chiffres est 99 999. La calculatrice donne $\sqrt{99\,999} \approx 316{,}22\ldots$

Ceci limite la recherche aux palindromes à 3 chiffres inférieurs à 316.

On calcule 313^2, 303^2, 292^2 etc. qui ne sont pas des palindromes, jusqu'à la solution : $\boxed{\mathbf{212^2 = 44\,944}}$.

Exercice 3 – *Pesons*, 7 points

La boîte de masses optimale est composée des masses 1, 3 et 9 :

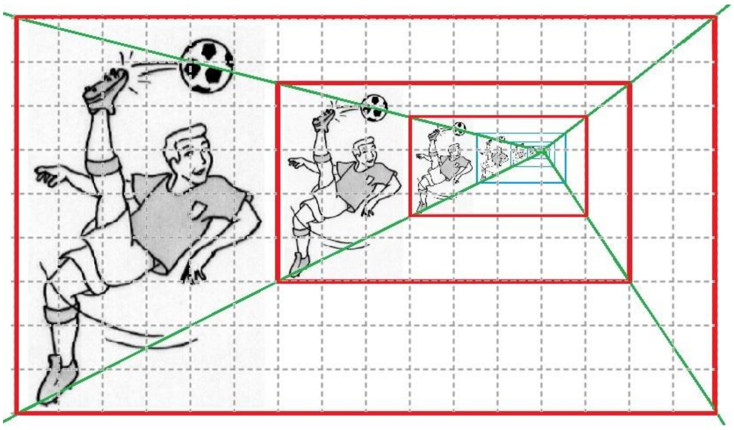
1=1 2=3-1 3=3 4=3+1 5=9-3-1 6=9-3 7=9-3+1 8=9-1 9=9 10=9+1
11=9+3-1 12=9+3 13=9+3+1

Plus généralement, si on veut aller au-delà de 13, la « boîte de masses optimale » est composée des puissances de 3.
Pour en savoir plus : voir notation ternaire balancée.

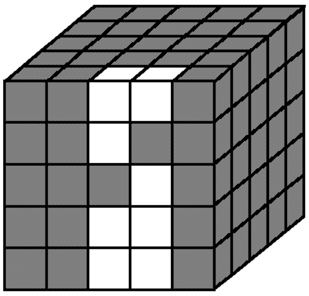
Exercice 4 – *Dans la lucarne*, 5 points

Le rapport de réduction est $\frac{1}{2}$.

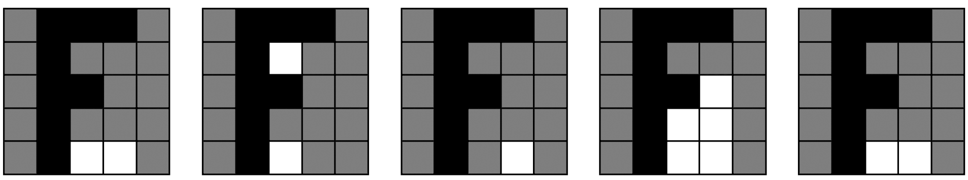
Seuls les tracés des trois premiers rectangles sont demandés.
Si leurs positions relatives sont correctes, les droites vertes sont concourantes.



Exercice 5 – *Truffé de cubes*, 7 points



Voici le cube après qu'on l'a rogné d'une épaisseur sur toutes ses faces :
On peut compter les cubes blancs par étages : **il y en a 12 en tout.**

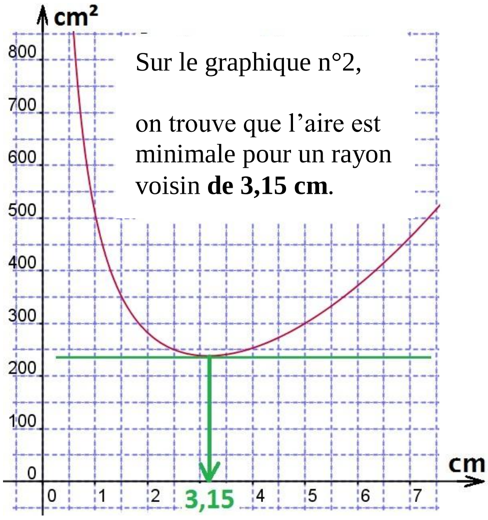


couche 1 couche 2 couche 3 couche 4 couche 5

NB : on peut aussi compter par tranches verticales, frontales ou latérales.

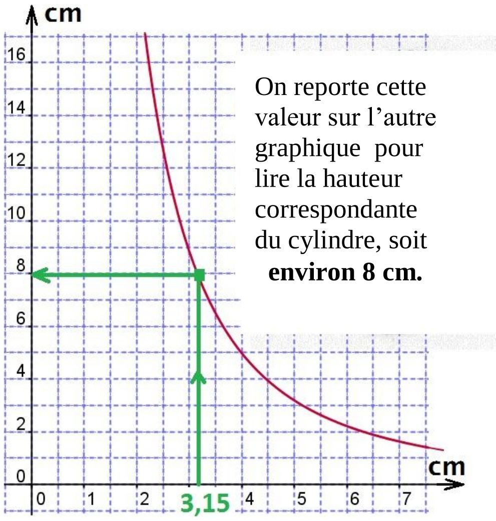
Mathématiques Sans Frontières

Exercice 6 – *Au plus juste*, 5 points



Sur le graphique n°2,

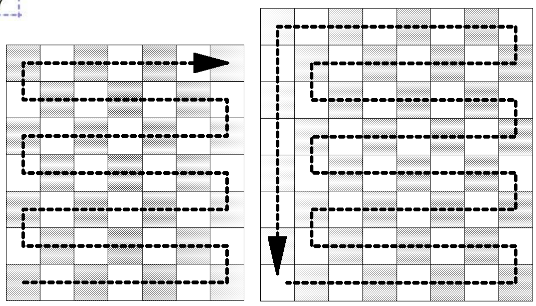
on trouve que l'aire est minimale pour un rayon voisin **de 3,15 cm**.



On reporte cette valeur sur l'autre graphique pour lire la hauteur correspondante du cylindre, soit **environ 8 cm.**

Les dimensions de l'étiquette sont
8 cm × 19,8 cm environ.
(Sa longueur égale 2πR).

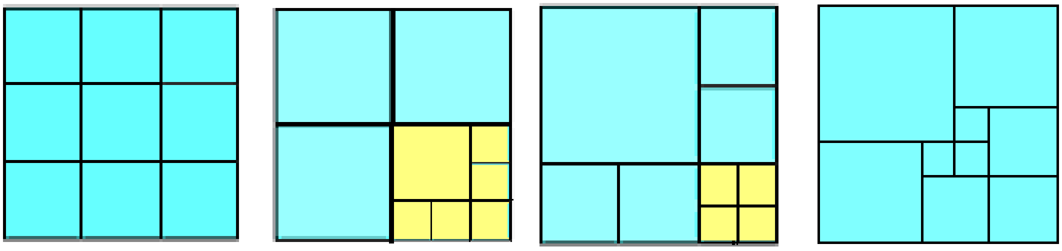
Exercice 7 – *Retour à la case départ*, 7 points



Voici un essai infructueux pour un carré 7 × 7 et un chemin convenable pour le carré 8 × 8.
Après de tels essais, on conjecture qu'il est possible de tracer un tel chemin si et seulement si le nombre de cases du damier est pair.

Démonstration de l'impossibilité pour les impairs :
Le nombre de pas à effectuer est le nombre de cases du damier. A chaque pas, on change de couleur. Par conséquent, si on en fait un nombre impair, on se trouvera sur une case qui n'a pas la couleur de la case de départ a1, il est donc impossible d'y revenir.
Ou bien : Pour revenir en a1, il faut faire autant de pas vers la gauche qu'on a fait de pas vers la droite et autant vers le bas que vers le haut. On a donc fait au total un nombre pair de pas.
Si le nombre de cases est impair, on n'a donc pas pu les visiter toutes.

Exercice 8 – *Quatre fois neuf*, 5 points : Voici quatre solutions, il semble qu'il n'y en ait pas d'autre.

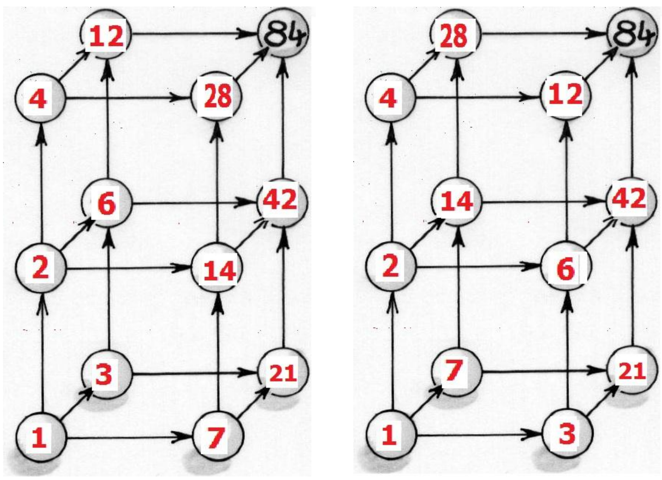


Les partages de carrés en carrés ont fait l'objet de recherches récentes aux XXe et XXIe siècles : http://www.squaring.net/

Exercice 9 – *Parcours fléché*, 7 pts

84 a exactement 12 diviseurs. Il s'agit de les placer sur les 12 boules.

Il y a deux solutions symétriques :

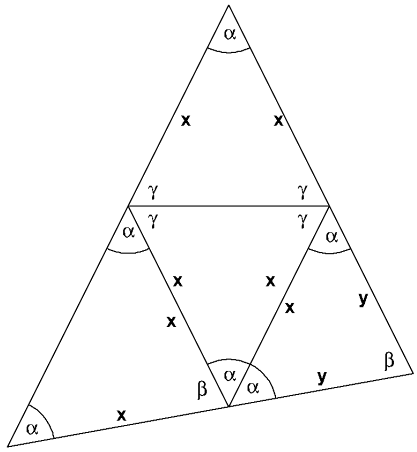


Ces dispositions résultent de l'écriture de 84 en produit de facteurs premiers :

$$\boxed{84 = 2^2 \times 3 \times 7}$$

Mathématiques SANS Frontières

Exercice 10 – *Quatre pour un*, 10 points



Voici les quatre pièces du puzzle et leur disposition :

Comme $\beta = 180 - 2\alpha$ et $\gamma = 90 - \dfrac{\alpha}{2}$, les trois côtés de la figure somme sont bien rectilignes et c'est donc bien un triangle.
De plus, il est isocèle car il a deux angles égaux (α) et deux côtés égaux (x+y).

Exercices « Spécial Secondes »

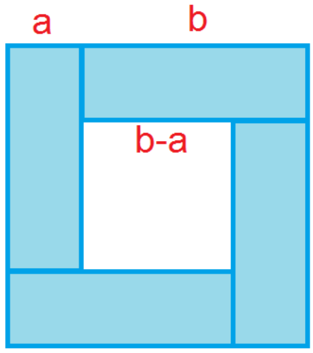
Exercice 11 – *Ne compte pas pour des clous*, 5 points

Soient n le nombre total d'intervalles (ou de clous) et p le nombre **d'intervalles** dans le secteur blanc.

On a alors : $\dfrac{p+1}{n} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{p-1}{n} = \dfrac{3}{10}$. On en déduit que $p = 19$ et $n = 60$.

P(Noir) = $1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{19}{60} - \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{20}}$.

Exercice 12 – *Morceaux d'accordéon*, 7 points



Notons a et b les largeur et longueur des rectangles assemblés.
Alors le grand carré a pour côté a+b et le petit b-a.

Le rapport des aires est 4 : $(a+b)^2 = 4(b-a)^2$.

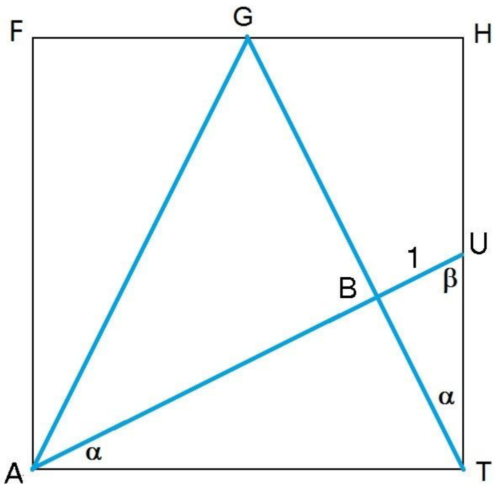
Alors le rapport des côtés est 2, donc : a+b = 2(b-a).

On en déduit que b=3a. Ainsi, les dimensions de la feuille qui a été pliée en accordéon étaient **4a et 3a**.

(ou bien 12a et a, mais la figure de l'énoncé suggère plutôt la première solution).

NB : On peut aussi résoudre l'équation des aires par factorisation.
Par contre, les développements de $(a+b)^2$ et $(b-a)^2$ conduiraient à des équations du second degré assez fastidieuses.

Exercice 13 pour les secondes générales et technologiques : *De bout en bout*, 10 points



Il y a plusieurs façons de mener ces calculs.

Par exemple, à l'aide des angles :

Les triangles TAU et HTG et FAG sont isométriques, donc les angles $\widehat{TAU}$ et $\widehat{GTH}$ sont égaux.

Des considérations d'angles complémentaires α et β montrent alors que le triangle BUT est rectangle en B.

On a : $\tan(\alpha) = \dfrac{UT}{AT} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{BU}{TB} = \dfrac{TB}{AB}$

On en déduit : BT = 2 cm, puis AB = 4 cm :
les longueurs des segments AU, GT et AG sont égales à 5 cm. **La longueur totale est 15 cm.**

On peut aussi calculer avec Pythagore ou même avec Thalès, si l'on trace la hauteur issue de G au préalable.

Exercice 13 pour les secondes professionnelles : *Forts, ces coffres !* 10 points

On pourra utiliser un tableur :

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	4	3	1	
		= C2 + D2	= B2 - D2	= C2 + E2	= C2 - D2	
3	2	7	-1	5	1	
4	3	4	2	0	-6	
5	4	**2**	**4**	**-4**	**2**	ouvre le petit coffre
39	38	436 912	-436 906	786 434	-87 380	
40	39	349 528	-349 522	-524 286	-1 223 340	
41	**40**	**-873 808**	**873 814**	**-1 572 862**	**174 764**	ouvre le grand coffre

Mathématiques sans Frontières