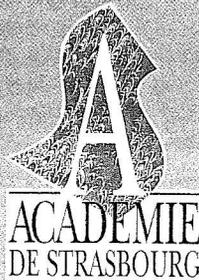


1995

Compétition  
interclasses  
de 3<sup>e</sup> et 2<sup>de</sup>

# Mathématiques sans frontières



organisée par  
l'IREM et l'Inspection  
Pédagogique Régionale

Coordination générale :  
Mathématiques  
sans frontières

6, rue de la Toussaint  
67081 Strasbourg Cedex  
Fax : 88 23 38 76

Crédit Mutuel

la banque à qui parler

Les exercices n° 3, 6, 8, 10, 11 et 13 ne nécessitent aucune justification. Pour les autres, des explications sont demandées. Toute solution, même partielle, sera examinée. Le soin sera pris en compte. Ne prendre qu'une seule feuille-réponse par exercice.

Exercice  
10 Points  
1

## Avec frontière

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien.

Baron Münchhausen was awarded land for his bravery. He had a map drawn up indicating his castle and the boundary separating his land from the King's. The Royal Surveyor confirmed that the map was correct.

During a peasants' revolt, after the castle was burnt to the ground, all that remained was the following document.

According to the fragment that was left, the peasants claim that their village doesn't belong to the Baron's estate and now they refuse to pay him any taxes.

The Baron is of a different opinion...

Who is right? Explain your answer.

\*\*\*\*\*

El barón de Münchhausen recibió propiedades de terreno en agradecimiento por sus hazañas. Mandó hacer un plano en el que se dibujaron su castillo y la frontera que separaba su propiedad de la del Rey. El Geómetra Real confirmó la exactitud de dicho plano.

Durante una revuelta de paisanos, el castillo fue incendiado y al barón no le quedó más que el documento adjunto.

Según este fragmento de carta, los lugareños dicen que su pueblo no pertenece al dominio del barón y se niegan ahora a pagarle el impuesto. La opinión del barón es opuesta.

¿Quién tiene razón? Explicar la respuesta.

\*\*\*\*\*

Baron Münchhausen wurde für seine Heldentaten mit Grundbesitz belohnt. Er ließ einen Plan machen, auf dem sein Schloß und die Grenze gezeichnet waren, die seinen Besitz von dem des Königs trennte. Der Geometer des Königs bestätigte, daß dieser Plan richtig sei.

Während eines Bauernaufstandes brannte das Schloß nieder; nur das abgebildete Dokument blieb übrig.

Für die Einwohner des Dorfes ist dieses Kartenstück der Beweis, daß ihr Dorf nicht dem Baron gehöre, und sie wollen ihm nun keine Steuern bezahlen. Der Baron ist nicht damit einverstanden.

Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.

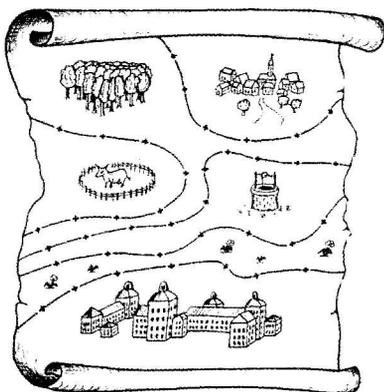
\*\*\*\*\*

Il barone di Münchhausen fu ricompensato dei suoi successi con l'assegnazione di terreni. Egli fece predisporre una pianta con il disegno del suo castello e del confine tra la sua proprietà e quella del re. Il Geometra reale confermò l'esattezza della pianta.

A causa di una rivolta degli abitanti del villaggio il castello fu incendiato e non restò che il documento qui sotto.

In base a questo frammento di carta i paesani ritenevano che il loro villaggio non appartenesse alla proprietà del barone e si rifiutarono di pagargli l'imposta. Il barone era di parere contrario.

Chi aveva ragione? Si spieghi la risposta.



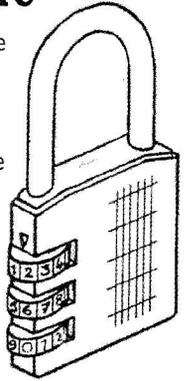
Exercice  
5 Points  
2

## Trou de mémoire

Chantal a oublié la combinaison de trois chiffres de l'antivol du vélo que son amie lui a prêté.

Aussi s'arme-t-elle de patience et procède-t-elle méthodiquement par essais successifs pour retrouver cette combinaison. Chaque essai lui demande environ 2 secondes.

Chantal peut-elle raisonnablement espérer avoir trouvé la bonne combinaison en moins de trente minutes? Expliquer la réponse.



Exercice  
10 Points  
3

## Un petit bijou

Pour récompenser sa fille qui vient de réussir brillamment ses examens, un professeur de mathématiques décide de lui offrir une épinglette en or en forme de conchoïde de cercle.

Voici comment on peut obtenir la forme de ce bijou :

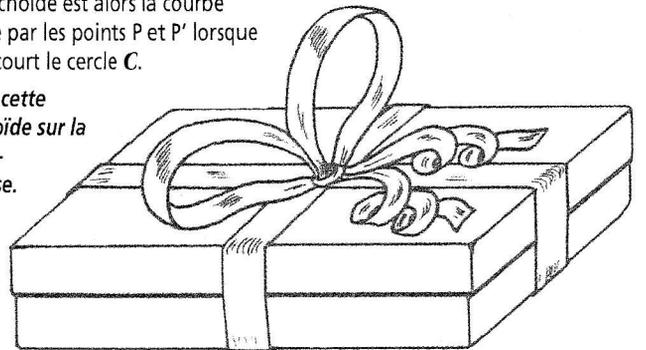
Sur un cercle  $C$  de rayon  $r = 3,5$  centimètres, placer un point  $A$  qui restera fixe.

Pour chaque point  $M$  du cercle, on considère les points  $P$  et  $P'$  de la droite  $(AM)$  tels que :

$$MP = MP' = r$$

La conchoïde est alors la courbe décrite par les points  $P$  et  $P'$  lorsque  $M$  parcourt le cercle  $C$ .

Tracer cette conchoïde sur la feuille-réponse.



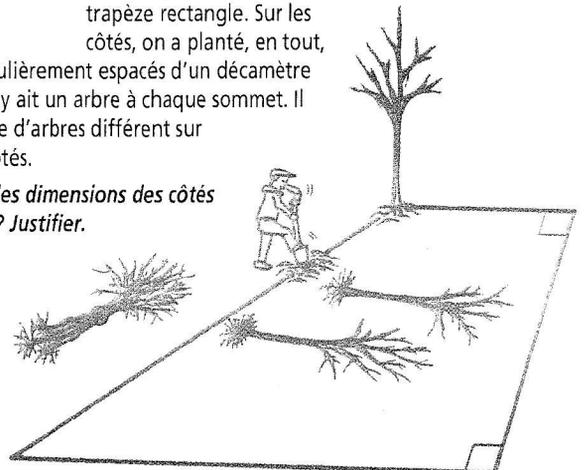
Exercice  
5 Points  
4

## 16 trous

Un champ a la forme d'un trapèze rectangle. Sur les côtés, on a planté, en tout,

16 arbres régulièrement espacés d'un décimètre de sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet. Il y a un nombre d'arbres différent sur chacun des côtés.

Quelles sont les dimensions des côtés de ce champ? Justifier.



**Exercice 5**  
10 Points

## Sans queue ni tête

Dans une île lointaine, un vaillant chevalier doit affronter des dragons à plusieurs têtes et plusieurs queues. D'un coup d'épée, le chevalier peut leur couper soit une tête ou deux têtes, soit une ou deux queues.

Les dragons ont des pouvoirs magiques : coupez-leur une tête, il en repousse une autre instantanément ; coupez-leur une queue, il en repoussera deux !

En revanche, si on leur coupe deux têtes d'un seul coup d'épée, rien ne repousse... mais deux queues coupées d'un seul coup sont remplacées par une nouvelle tête.

Naturellement, un dragon n'est tout à fait mort que lorsqu'il n'a plus ni tête ni queue.

*Comment faut-il procéder pour tuer un terrible dragon à 5 têtes et 7 queues ?*

*Existe-t-il des dragons immortels ? Lesquels ?*



(D'après "Pour la Science", Pierre TOUGNE, Juillet 1994)

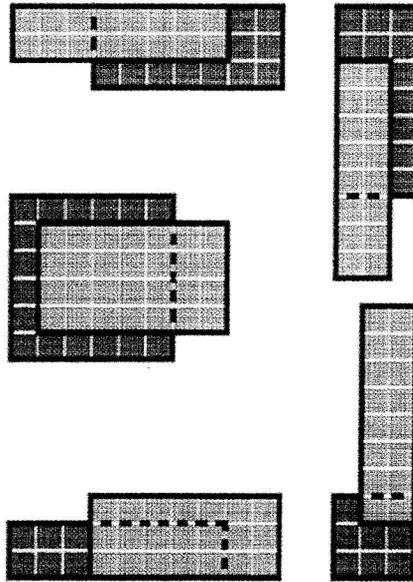
**Exercice 6**  
5 Points

## Sans trou

Voici les cinq pièces d'un puzzle formées chacune par deux rectangles collés l'un sur l'autre. Chaque pièce a donc deux étages de la même épaisseur.

*Construire, puis assembler ces 5 pièces de manière à obtenir deux carrés superposés de 10 centimètres de côté.*

*Coller cet assemblage sur la feuille-réponse.*



**Exercice 7**  
10 Points

## Grand trou

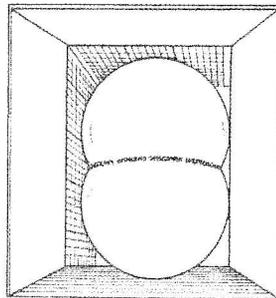
La Grande Arche de la Défense à Paris est un symbole d'espoir

et d'ouverture vers l'avenir. Mais il paraît que son vaste espace vide suscite un sentiment d'angoisse chez certaines personnes.

Ainsi un architecte a imaginé de combler cet espace parallélépipédique de 90 mètres de haut et 70 mètres de large par deux énormes ballons formant deux sphères tronquées et d'inscrire un message de fraternité le long du cercle d'intersection.

Cet ensemble serait tangent en 6 points aux 4 faces intérieures de l'édifice.

*Calculer le périmètre du cercle d'intersection.*



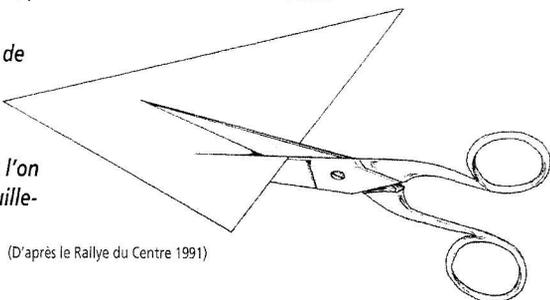
**Exercice 8**  
10 Points

## Triangles jumeaux

*Dessiner sur la feuille-réponse un triangle quelconque et l'une de ses médianes. Montrer que cette médiane le partage en deux triangles de même aire.*

Comment découper l'un de ces triangles en deux morceaux qui, juxtaposés d'une autre façon, permettent de reconstituer l'autre triangle ?

*Indiquer le trait de coupe sur le dessin et réaliser un tel assemblage que l'on collera sur la feuille-réponse.*



(D'après le Rallye du Centre 1991)

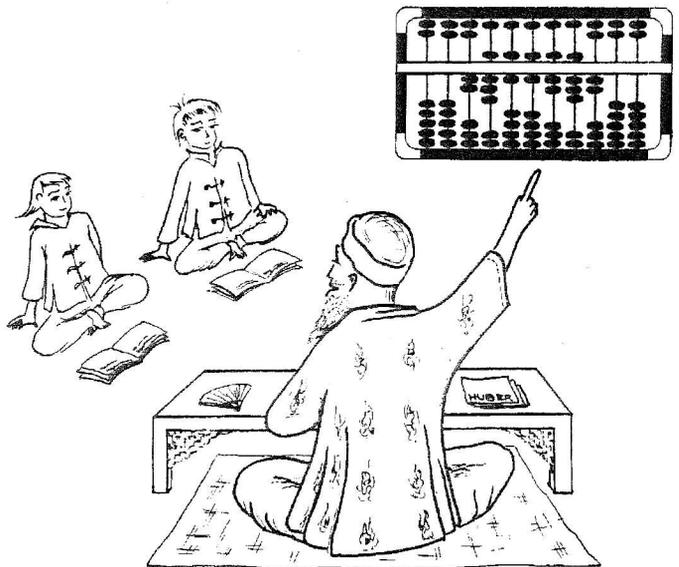
**Exercice 8**  
5 Points

## Boulier chinois

Les Chinois utilisent encore aujourd'hui des bouliers comme calculatrices. Ils savent faire des additions, des soustractions, des multiplications et même des divisions et des extractions de racines carrées !

Voici un boulier qui affiche le nombre 286 678 200.

*Dessiner sur la feuille-réponse un boulier qui affiche le nombre 31 415 926.*



Exercice 10  
5 Points

## 3615 MSF

Alors que Jean pianote sur son Minitel, il voit apparaître sur l'écran une suite de nombres. Pressentant un message chiffré, il murmure soudain :

"Mais bien sûr ! On a choisi un nombre entier, puis on a remplacé chaque lettre par son rang dans l'ordre alphabétique, augmenté de l'entier choisi."

Écrire le texte en clair sur la feuille-réponse.

13-10-23-28 23-24-29-27-14 22-24-23-13-14  
12-24-23-29-14-22-25-24-27-10-18-23 27-14-16-18  
25-10-27 30-23-14 14-33-29-27-14-22-14 18-23-29  
14-27-13-14-25-14-23-13-10-23-12-14, 21-14-28  
18-23-13-18-31-18-13-30-28 23-14-25-14-30-31-14  
23-29 25-21-30-28 27-14-28-24-30-13-27-14  
28-14-30-21-28 21-10 25-21-30-25-10-27-29 13-14  
21-14-30-27-28 25-27-24-11-21-14-22-14-28.

28-18-16-23-14 13-10-21-10-18 21-10-22-10.

Exercice 12  
15 Points

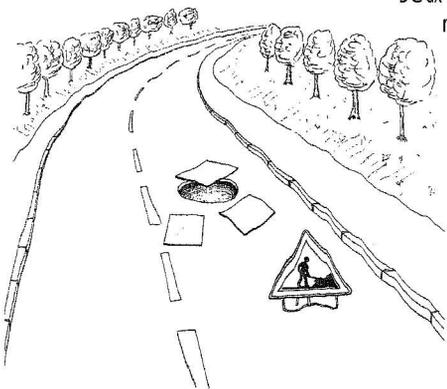
## Question à creuser

À la fin de leur journée de travail, des ouvriers doivent recouvrir entièrement un trou circulaire fait sur un chantier. Pour cela, ils disposent de plaques carrées de 1 mètre de côté.

Deux plaques ne suffisent pas, mais avec trois plaques qui ne se chevauchent pas, ils y parviennent tout juste : le trou est ainsi le plus grand disque pouvant être recouvert par les trois carrés.

Faire un dessin à l'échelle 1/20, puis calculer le diamètre du trou.

(D'après le Rallye du Centre 1991.)



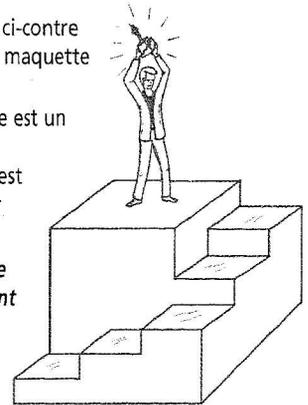
Exercice 11  
10 Points

## Pièce montée

Le solide représenté ci-contre en perspective est la maquette d'un podium.

Il a été taillé dans un pavé droit dont la base est un carré de côté 7,5 centimètres et la hauteur 6 centimètres ; chaque marche de l'escalier est carrée de côté 2,5 centimètres et sa hauteur est 1 centimètre.

Construire un patron en un seul morceau de cette maquette qui tienne sans débordement sur la feuille-réponse, et le coller par le fond sur cette feuille.



## Spécial Seconde

Exercice 13  
5 Points

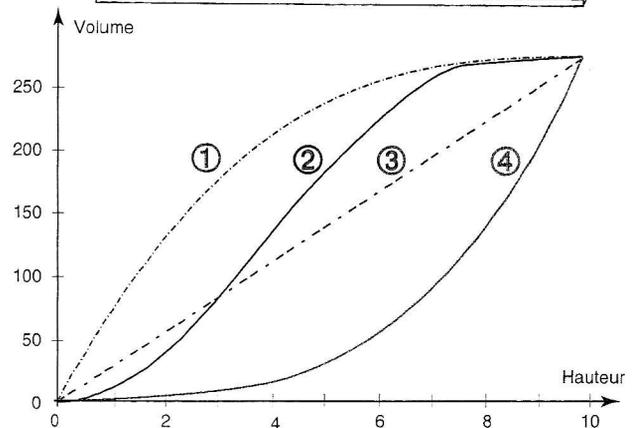
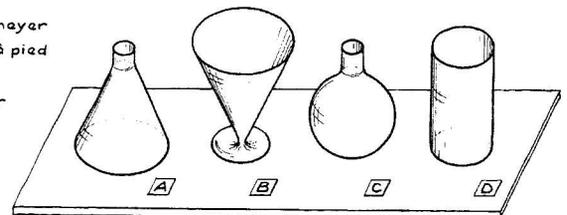
## Ras le bol

Les 4 récipients ci-contre ont la même hauteur et contiennent le même volume lorsqu'ils sont remplis à ras-bord.

Pour chacun d'eux, on a tracé la courbe représentant le volume de liquide versé en fonction de la hauteur atteinte.

Rendre à chaque récipient le numéro de la courbe qui lui correspond.

- A : Erlenmeyer
- B : Verre à pied
- C : Ballon
- D : Becher



## Spécial Seconde

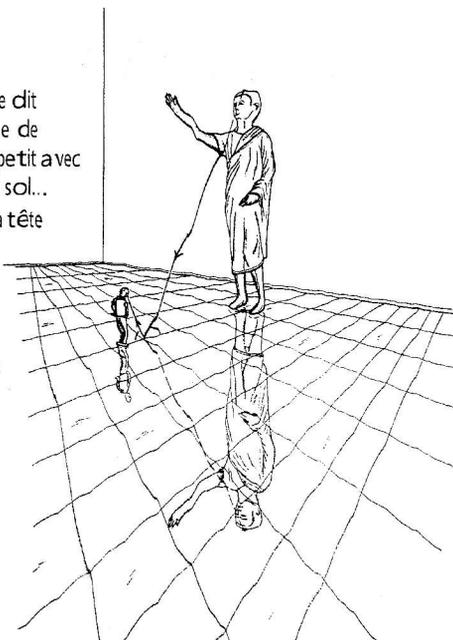
Exercice 14  
10 Points

## Réflexion faite...

"Ah quelle est grande," se dit Rémy en admirant la statue de Thalès ! "Je me sens bien petit avec mes yeux à 1,72 mètres du sol..."

Tiens, je vois le reflet de sa tête dans le marbre brillant du dallage et, en comptant, je peux dire que ce reflet atteint la troisième dalle, à 3 mètres du pied de la statue et à 80 centimètres de mes pieds."

Calculer la hauteur de la statue.



Exercice 15  
15 Points

## Ennéagone étoilé

Un élève du Savant Cosinus lui dit un jour : "Maître, j'ai trouvé le moyen de construire, sans rapporteur, un polygone régulier à neuf côtés."

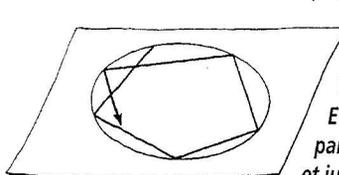
— Un enneagone régulier ?

— Oui, et voilà comment je procède :

Je trace un cercle de centre O et de rayon R.

À partir d'un point du cercle, je reporte huit fois au compas une longueur égale à  $\frac{9}{7}R$  sur ce cercle.

J'obtiens ainsi les 9 sommets d'un polygone régulier étoilé.



— Tu affirmes donc que  $\frac{9}{7}R$  est le côté d'un enneagone régulier ?... Permetts-moi d'en douter !"

Effectuer la construction de l'élève à partir d'un cercle de rayon 7 centimètres, et justifier par un calcul les réserves émises par le Savant Cosinus.