

## Matemáticas sin fronteras – Diciembre 2002

### Ejercicio 1 ( 7 puntos) : cinta de Möbius

La solución de ejercicio 1 debe ser redactada en lengua extranjera.

Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.

Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.

Fabriquer un tel ruban. Colorier une face. *Que remarque-t-on ?*

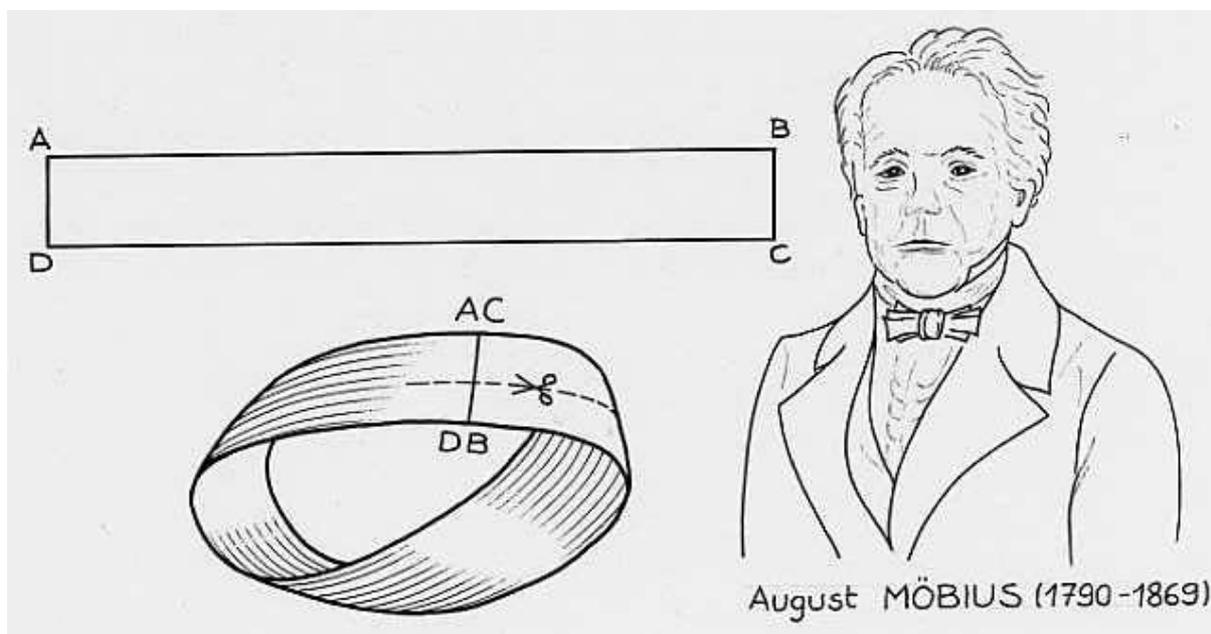
Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne. *Que constate-t-on ?*

Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen.

Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung : A muss mit C und B mit D zusammenfallen.

Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an. **Was hast du bemerkt ?**

Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie. **Was stellst du fest ?**



Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia. *Che cosa notate ?*

Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea. *Che cosa osservate ?*

---

The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.

To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.

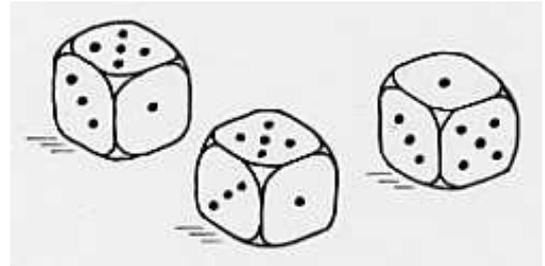
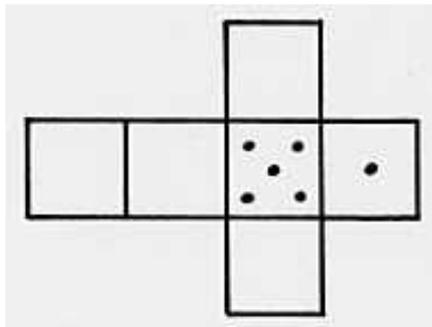
Now cut out such a Möbius strip. Color one side. *What do you observe ?*

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line. *What do you notice ?*

### Ejercicio 2 ( 5 puntos) : Sin defecto

Para que un dado cúbico sea homologado la suma de los puntos marcados en las dos caras opuestas debe ser siempre igual a 7.

*Dibujar los patrones de todos los dados homologados completando a cada paso el patrón de al lado.*



### Ejercicio 3 ( 7 puntos) : la velocidad es sobrepasada

4 personas practican la conducción conjunta y efectúan a turnos el mismo trayecto de 24 km cada día de la semana.

Silvia ,prudente, circula con calma y tarda siempre el mismo tiempo.

Cristina tarda 6 minutos menos . Miguel circula demasiado rápido y tarda 6 minutos menos que Cristina. En cuanto a Antonio, es un irresponsable y tarda 6 minutos menos que Miguel.

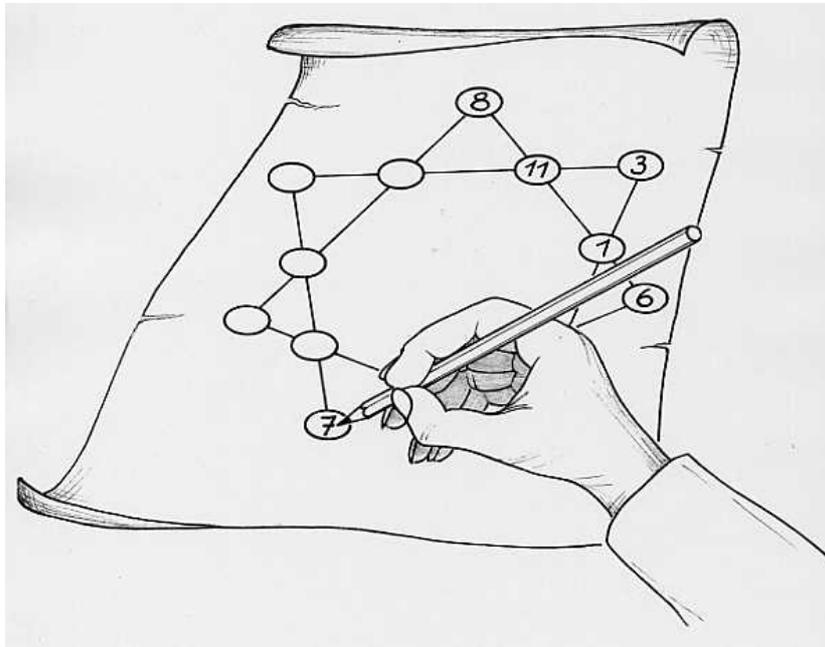
Según esto, la velocidad de Antonio es el doble de la de Cristina.

*Calcular la velocidad media de cada uno de los conductores.*



#### Ejercicio 4 ( 5 puntos) : Heptágono mágico

Mauricio se esfuerza en trazar una estrella mágica de 7 brazos, en la cual va a colocar todos los números enteros del 0 al 13 de modo que la suma de 4 números alineados sea siempre la misma.



Completar la estrella de Mauricio y representarla con claridad en el folio-respuesta.

#### Ejercicio 5 ( 7 puntos) : Control continuo

Hacia el final del siglo XX Sildavia es dotada de 4 centros de control de su espacio aéreo. Estos han sido instalados en Nantsk , Klow , Lugdun y Tolsa.

Para coordinar el trabajo de estos 4 centros, las autoridades sildavas han anunciado una regla simple :

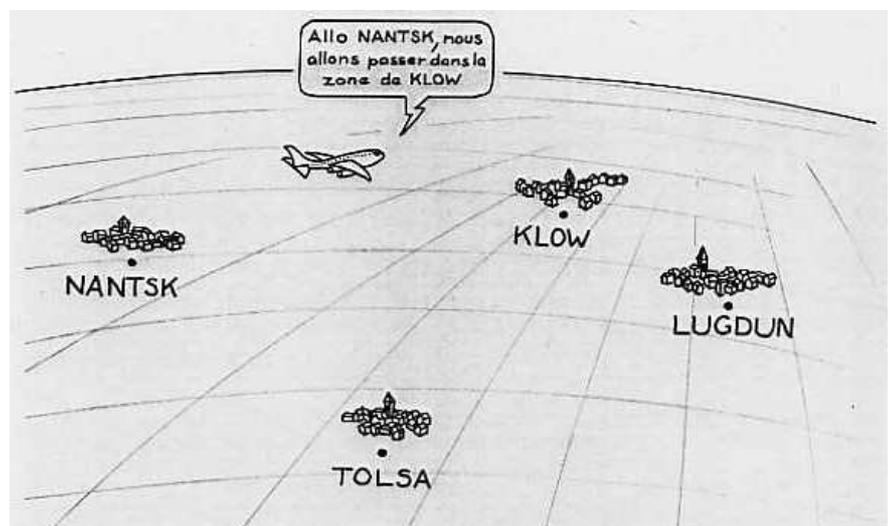
« Todo avión que sobrevuele el país deberá ser vigilado por el centro de control más próximo a su posición ».

De esta manera el espacio aéreo sildavo se encuentra protegido por 4 zonas.

Representar en el folio-respuesta las posiciones relativas a los 4 centros de control tomando 1 cm por 50 km.

Materializar las 4 zonas con 4 colores y después trazar bien sus fronteras.

Les damos las distancias :  
 $KT = 600 \text{ km}$  ;  $KL = 350 \text{ km}$  ;  
 $NK = 350 \text{ km}$  ;  $TL = 400 \text{ km}$  ;  
 $NT = 450 \text{ km}$ .



### Ejercicio 6 ( 5 puntos) : Todo aumenta

Héctor, de 50 años de edad, sabe que la esperanza de vida en su país es actualmente de 78 años y que ésta aumenta 2 meses cada año.



Si esta evolución prosigue, ¿en qué año la edad de Héctor será igual a la esperanza de vida de su país ?

### Ejercicio 7 ( 7 puntos) : No conforme

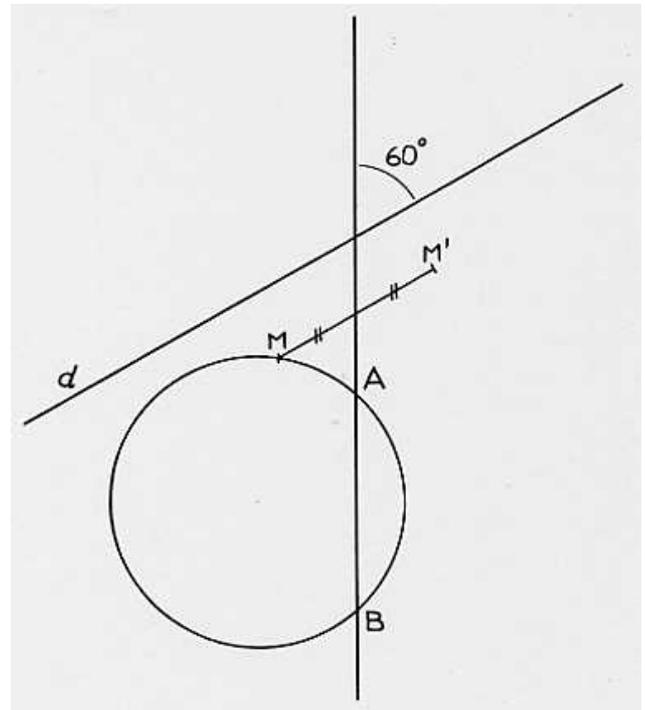
¡ Todavía octogonal, la simetría! , ¡ i ya basta !  
Juan quiere cambiar las reglas de la construcción para que la simetría mediante una recta no sea mas octogonal sino oblicua. Para ello inventa la simetría obliqua, cuyas reglas son las siguientes:

El punto  $M'$  simétrico de  $M$  mediante la recta  $(AB)$  es paralelo a la dirección  $d$  tal como:

- 1) Las rectas  $(MM')$  y  $d$  son paralelas.
- 2) El centro de  $[MM']$  pertenece a la recta  $(AB)$ .

Reproducir sobre el folio-respuesta una figura análoga a la figura de al lado; después construir punto por punto la imagen del círculo mediante esta simetría obliqua.

Las rectas  $(AB)$  y  $d$  forman un ángulo de  $60^\circ$ .

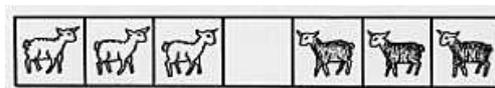


### Ejercicio 8 ( 5 puntos) : El salto del borrego

Los borregos blancos y negros deben intercambiar su pasto.

Les mostramos esta situación mediante el siguiente juego:

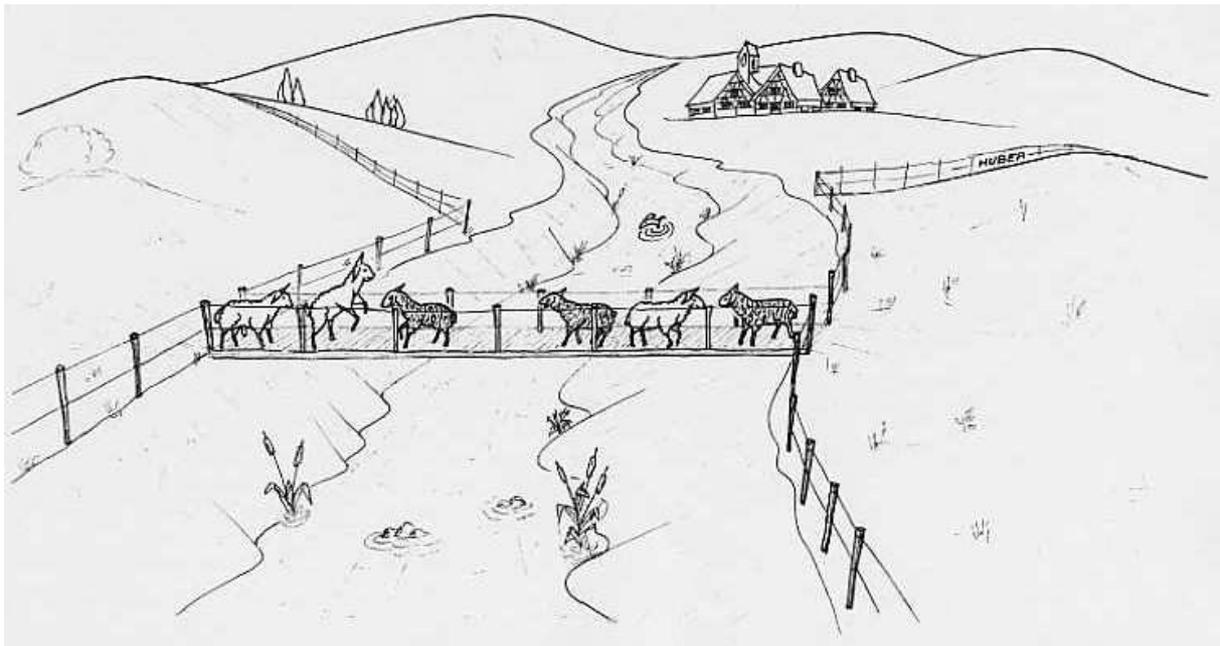
3 borregos blancos y 3 negros son dispuestos en una verja de 7 casillas, como queda indicado aquí al lado.



Sólo es posible desplazarse utilizando dos movimientos:

- 1) Haciendo avanzar un borrego hacia la casilla vacía que está delante de él.
- 2) Haciendo saltar un borrego por encima de otro vecino para llegar a ocupar la casilla vacía.

Queremos que los borregos blancos se encuentren a la derecha y los negros a la izquierda, separados por la casilla vacía.



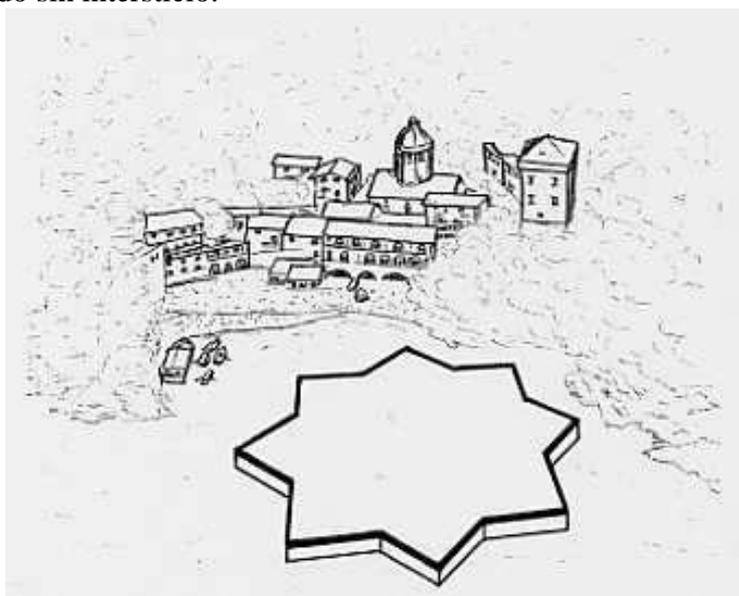
*Proporcionar un desarrollo de los movimientos que se han realizado para este intercambio.*

### **Ejercicio 9 ( 7 puntos) : Enlosado ligur**

Debido a las excavaciones arqueológicas en el monasterio de San Fruttuoso cerca de Génova , encontramos un enlosado formado por dos clases de baldosas en igual número estrechamente yustapuestas.

Unas tienen la forma de una estrella regular con 8 puntas que podremos obtener superponiendo 2 cuadrados de 1 dm de lado y con el mismo centro.

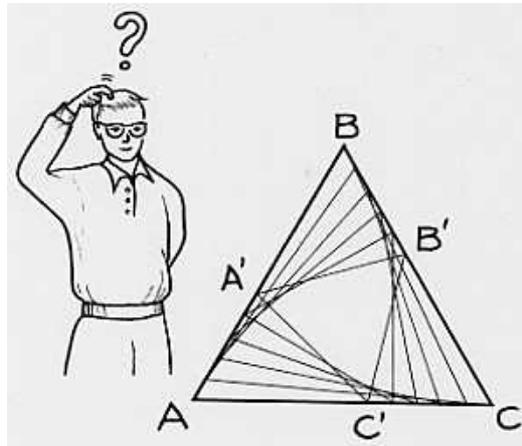
Las otras tienen un perímetro igual al de las primeras. Estas sirven de complementos para obtener un enlosado sin intersticio.



*Pegar sobre el folio-respuesta, en la escala  $\frac{1}{2}$  , una disposición de 6 baldosas : 3 de cada clase.*

### Ejercicio 10 ( 10 puntos) : Triángulos

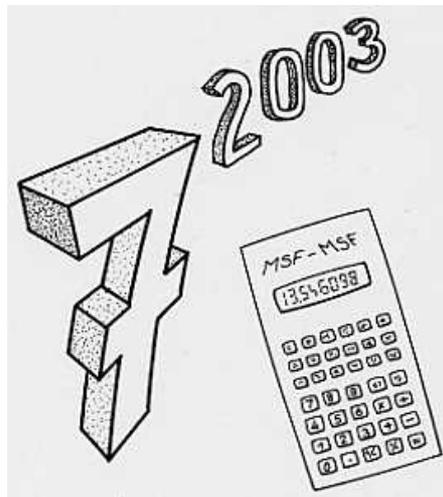
ABC es un triángulo equilátero de 8 cm de lado. Colocamos 3 puntos A' , B' y C' respectivamente sobre [AB] , [BC] y [CA] de modo que  $AA' = BB' = CC'$ .



¿Cómo debemos elegir la distancia  $AA'$  para que los triángulos  $AA'C'$  ,  $BB'A'$  y  $CC'B'$  sean rectángulos en A' , B' , C' ? Justifica la respuesta.

### Ejercicio 11 ( 5 puntos) : El fin justifica los medios

Marcos se divierte con la calculadora. El dice que es capaz de calcular las dos últimas cifras de cualquier potencia de 7.



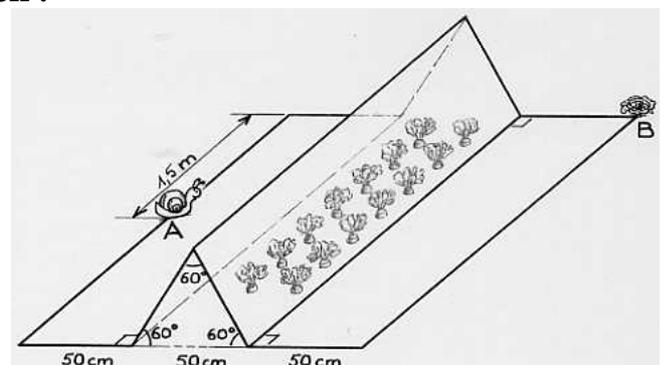
¿ Cuáles son las últimas cifras de  $7^{2003}$  ? Justifica la respuesta.

### Ejercicio 12 ( 7 puntos) ; El Hambre También !

Un caracol quiere trasladarse del punto A al punto B por el camino más corto.

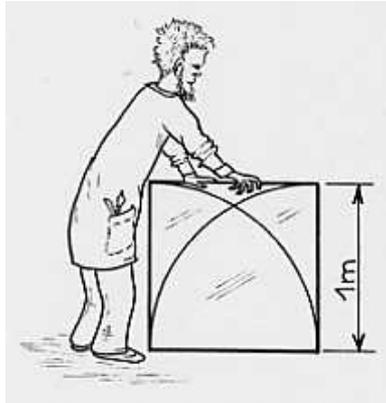
A lo largo del camino deberá escalar un invernadero en forma de prisma . Las dimensiones estan indicadas en la figura de al lado.

Calcular la longitud del camino. Justifica la respuesta.



### Ejercicio 13 ( 10 puntos) : Cuidado , frágil

Una ventana cuadrada de 1 m de lado está cerrada por una vidriera representada en el lado. Las superficies del vidrio están delimitadas por dos cuartos de círculos cerrados en las vértices inferiores del cuadrado.



*Determinar el área de cada una de las cuatro piezas de la vidriera.*