Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangsstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

ACADEMIE DE STRASBOURG

- Mit *Ausnahme* der ***Aufgaben 4, 6 und 8 muss die Lösung stets begründet werden.***
- ***Auch Teillösungen werden berücksichtigt.***
- ***Die Sorgfalt der Darstellung wird mitbewertet.***
- ***Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.***

13. März 2003

Aufgabe 1
7 Punkte

Kaffeepause

Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie. Un café coûte 35 centimes d'euros. La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.

Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.

Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.

Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.

Danièle a deux pièces de 20 centimes.

Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?

Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros. La maquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.

Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos.

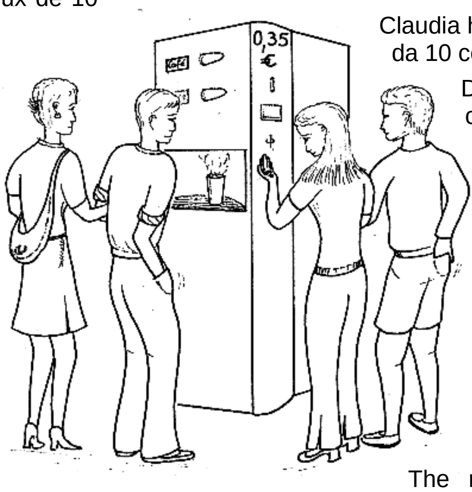
Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.

Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.

Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.

Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda. La maquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?



Quattro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta. Un caffè costa 35 centesimi di euro. La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.

Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.

Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.

Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.

Daniela ha due monete da 20 centesimi.

Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto. La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.

Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

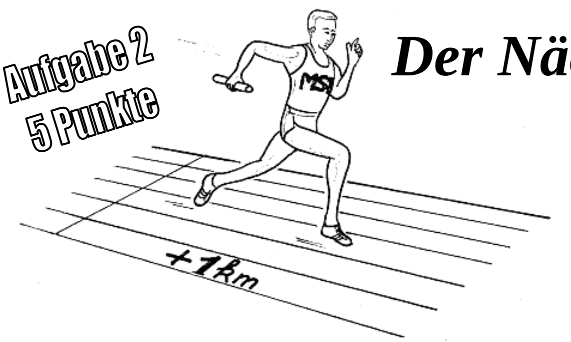
Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

How are they going to manage ?

Aufgabe 2
5 Punkte



Der Nächste bitte!

Bei einem Staffellauf wird die Gesamtstrecke von 40 km so durchlaufen, dass jeder Läufer 1km weiter laufen muss als sein Vorgänger. Außerdem muss jeder Läufer ein ganzzahliges Vielfaches der Streckelänge 1 km zurücklegen.

Gib für jedes Mitglied einer Staffelmannschaft an, welche Strecke es zurücklegen muss.

Vierfältig gedrittelt

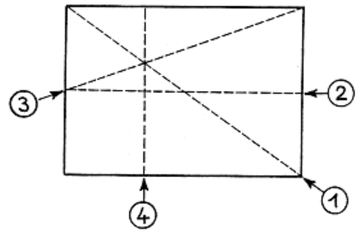
Dies ist ein Verfahren, welches allein durch Falten ermöglicht, die Länge eines rechteckigen Blatt Papiers zu dritteln:

Falte das Blatt zunächst entlang der Diagonalen (1) und entlang der Längsachse (2).

Danach faltest du das Blatt längs der Linien (3) und (4) gemäß der Abbildung.

Die Faltlinie (4) markiert nun ein Drittel der Blattlänge.

Begründe, warum dieses Verfahren zum Erfolg führt.



Aufgabe 4
5 Punkte

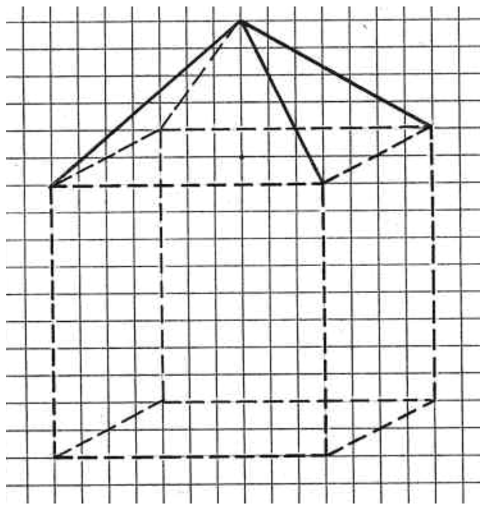
Rhombisch

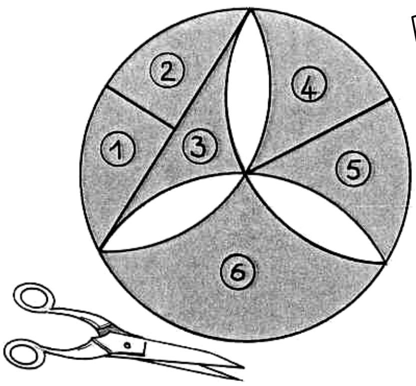
Die abgebildete Figur zeigt einen Würfel, auf dessen einer Seitenfläche eine regelmäßige Pyramide errichtet wurde. Ihre Höhe ist halb so lang wie eine Würfelkante.

Errichtet man auf jeder der sechs Würfelflächen eine solche Pyramide, so stellt man fest, dass je zwei Seitenflächen der Pyramiden in einer Ebene liegen und eine Raute bilden. Diese zwölf Rauten sind die Seitenflächen eines Körpers, der rhombisches Dodekaeder genannt wird.

Die 14 Ecken des Körpers werden von den acht Ecken des Würfels und den sechs Spitzen der Pyramiden gebildet.

Zeichne, ausgehend vom abgebildeten Schrägbild, ein Schrägbild des rhombischen Dodekaeders auf das Lösungsblatt. Schraffiere die sichtbaren Seitenflächen farbig.





Aufgabe 5
7 Punkte

Ohne π

Ausgehend von den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks wurde die abgebildete Figur konstruiert.

Um den Inhalt der graugetönten Fläche zu bestimmen, kann man diese, wie in der Figur angegeben, in sechs Teile zerschneiden. Diese sechs Teile lassen sich lückenlos zu einem Rechteck zusammenfügen.

Stelle dieses Puzzle aus einer Kreisscheibe mit dem Radius r = 6 cm her.

Füge die Teile zu einem Rechteck zusammen und klebe es auf das Antwortblatt.

Berechne den exakten Inhalt der grau getönten Fläche.

Aufgabe 6
5 Punkte

11 gewinnt

Eine ganze Zahl ist durch 11 ohne Rest teilbar, wenn der Betrag ihrer **alternierenden Quersumme** ein Vielfaches von 11 ist oder Null ist.

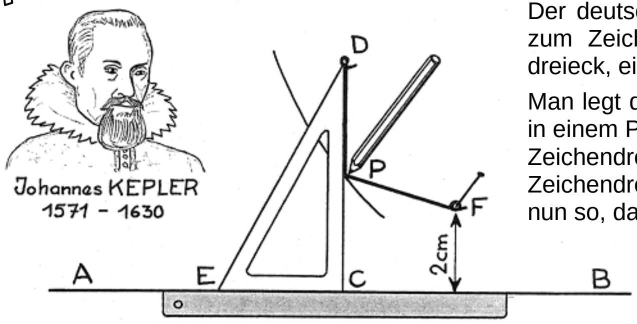
Beispiele:

- **1958** ist Vielfaches von 11, es gilt 1 – 9 + 5 – 8 = –11
- **2002** ist Vielfaches von 11, es gilt 2 – 0 + 0 – 2 = 0
- **94 919** ist Vielfaches von 11, es gilt 9 – 4 + 9 – 1 + 9 = 22
- **1989** ist **kein** Vielfaches von 11, es gilt 1 – 9 + 8 – 9 = –9

Finde das größte Vielfache von 11, das aus 10 Ziffern besteht, welche alle verschieden sind.

Aufgabe 7
7 Punkte

Mit Nadel und Faden



Der deutsche Astronom Johannes Kepler überlieferte ein Verfahren zum Zeichnen einer Parabel. Man verwendet dazu ein Zeichendreieck, ein Lineal, einen Faden, eine Nadel und einen Stift.

Man legt das Lineal entlang einer Geraden (AB) und sticht die Nadel in einem Punkt F ein. Der Faden wird im Punkt F und im Punkt D des Zeichendreiecks befestigt. Er ist so lang wie die Seite CD des Zeichendreiecks. Mit der Spitze P des Stiftes spannt man die Schnur nun so, dass der Abschnitt PD an der Seite CD anliegt.

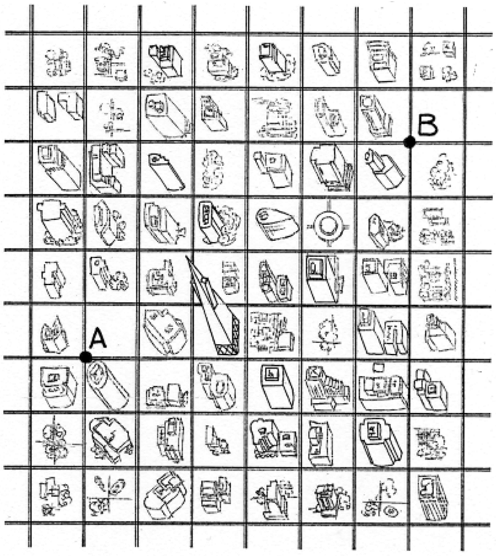
Gleitet nun die Seite EC des Zeichendreiecks entlang der Geraden (AB), so bewegt sich die Stiftspitze P auf einer Parabel.

Zeige zunächst, dass $\overline{PF} = \overline{PC}$ gilt.

Zeichne dann punktweise eine solche Parabel, bei welcher der Abstand von F zu (AB) 2cm beträgt und die Strecke CD 14cm lang ist.

Aufgabe 8
5 Punkte

Polizeigeometrie



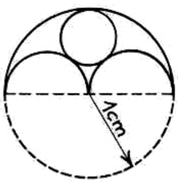
In manchen Städten, zum Beispiel in New York oder in Mannheim, bilden Straßen ein quadratisches Gitter.

Jules und Jim sind die Chefs zweier Polizeistationen in einer solchen Stadt. Im abgebildeten Stadtplan sind diese Stationen mit A und B bezeichnet.

Zeichne das Quadratgitter auf das Antwortblatt. Markiere nun farbig die Straßenpunkte, für welche ein Streifenwagen jeweils die gleiche Fahrtstrecke zurücklegen müsste, um die Station von Jules oder die von Jim zu erreichen.

Aufgabe 9
7 Punkte

Monduhr



Die abgebildete Uhr zeigt angenähert die Phasen des Mondes an.

Der Mond wurde vor dunklem Hintergrund auf eine drehbare, kreisrunde Scheibe gemalt, deren Drehachse mit der Drehachse der Zeiger übereinstimmt. Das Mondbild zeigt sich nun in einem Fenster des Zifferblattes, welches von drei Halbkreisen begrenzt wird.

Bei Vollmond ist das Bild des Mondes vollständig im Fenster zu sehen.

Berechne den Durchmesser des Mondbildes, wenn der Radius des großen Halbkreises 1cm beträgt und der Mond möglichst groß erscheinen soll.

Aufgabe 10
10 Punkte

Wie man es dreht und wendet

Bei einem Spiel verwendet man Spielsteine mit jeweils einer schwarzen und einer weißen Seite, die man zu einer Reihe aneinanderlegt. Zunächst sind nur die weißen Seiten sichtbar.

Ziel des Spiels ist es, die Steine zu wenden, so dass am Ende alle schwarzen Seiten oben liegen. Dabei muss folgende Regel eingehalten werden:

Man blockiert mit dem Finger einen der Steine und dreht die unmittelbar benachbarten Steine um. Je nach dem, welcher Stein blockiert wurde, müssen dazu ein oder zwei Steine gewendet werden. Dies setzt man fort, bis alle schwarzen Seiten oben liegen.

Zeichne Reihen von 2 Steinen, 3 Steinen usw. bis zu 15 Spielsteinen.

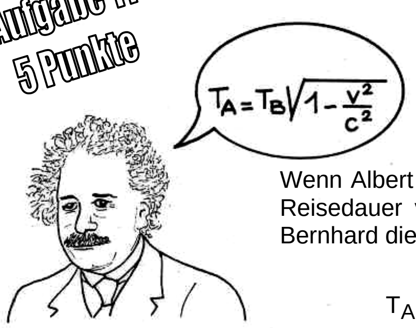
Markiere nun bei jeder Reihe, für die das Spiel durchführbar ist, mit einem Kreuz die Steine, welche nacheinander blockiert werden müssen. Gibt es für eine Reihe keine Lösung, so notiere dies ebenfalls.

Prüfe, ob es eine Lösung für eine Reihe von 2003 Spielsteinen gibt. Begründe deine Antwort.

nur für Klassenstufe 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Reisen hält jung



Albert EINSTEIN
1879 - 1955

Wie Albert Einstein feststellte, ist die Zeit keine absolute Größe. Vielmehr verläuft sie für einen Reisenden, welcher sich mit sehr großer Geschwindigkeit bewegt, anders, als für jemanden, der relativ zu ihm in Ruhe bleibt.

Wenn Albert sich relativ zu Bernhard mit der Geschwindigkeit v bewegt, werden beide für die Reisedauer verschiedene Zeiten messen. Misst Albert für die Reisedauer die Zeit T_A und Bernhard die Zeit T_B, so gilt nach Einstein der Zusammenhang

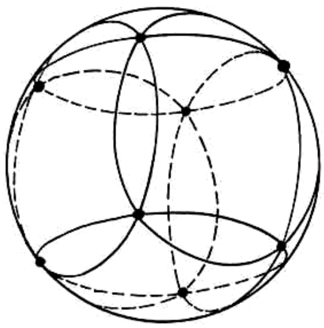
$T_A = T_B \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ($\approx 300000\frac{\text{km}}{\text{s}}$) bedeutet.

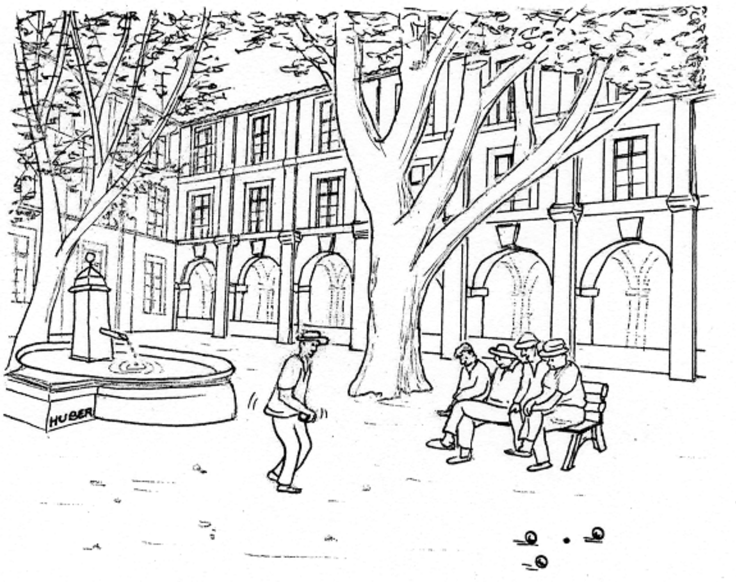
Als Albert seine Reise antritt ist er 40 Jahre und Bernhard 20 Jahre alt. Bei Alberts Rückkehr sind beide 60 Jahre alt.

Mit welcher Geschwindigkeit hat sich Albert fortbewegt? Gib die Antwort in km/s an.

Aufgabe 12
7 Punkte

Kugelspuren





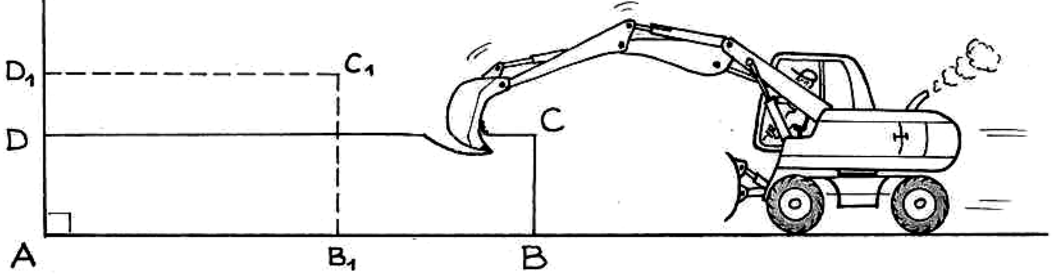
Auf einer Boule-Kugel mit dem Radius 37 mm sollen, wie in der Abbildung zu sehen, sechs gleich große Kreise eingraviert werden.

Ihre acht Schnittpunkte bilden die Ecken eines Würfels.

Berechne den Radius dieser Kreise.

Aufgabe 13
10 Punkte

Mittelmaß



Zeichne ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 3\,\text{cm}$.

Markiere auf AB einen Punkt B_1 derart, dass $\overline{AB_1}$ das arithmetische Mittel von $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ ist.

Zeichne nun das Rechteck A $B_1C_1D_1$, das den selben Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD haben soll.

Man wiederholt dieses Verfahren mit dem Rechteck $AB_1C_1D_1$ und erhält so das Rechteck A $B_2C_2D_2$ und so fort.

Zeichne auf diese Weise die ersten vier Rechtecke.

Wie entwickeln sich bei diesem Verfahren die Längen der Rechtecksseiten?