

# Mathematik Ohne Grenzen



## Hauptwettbewerb 2021

- Für jede Aufgabe, auch für nicht bearbeitete, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.
- Auch fehlerhafte oder unvollständige Lösungen werden begutachtet.
- Die Sorgfalt der Darstellung sowie die Präzision der Begründungen werden mit bewertet.

Mathématiques  
SANS  
Frontières

### Aufgabe 1 7 Punkte

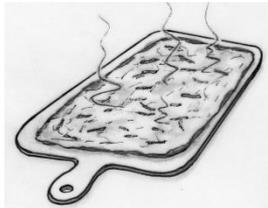
## Die Vorspeisen



Verfasst den Lösungstext in einer der vier Fremdsprachen im Umfang von mindestens 30 Wörtern.

Au repas de gala de l'Assemblée Internationale de Mathématiques Sans Frontières en Alsace, un Brésilien, un Suisse et un Allemand vont dîner avec leurs épouses. Lorsqu'ils commandent leurs entrées, un homme et une femme prennent chacun une tarte flambée ; un homme et une femme prennent chacun une salade alsacienne et un homme et une femme prennent chacun des escargots. Le Brésilien, qui a pris une salade alsacienne, dit alors à l'épouse de l'Allemand, qui a pris une tarte flambée : « C'est curieux, dans aucun couple, l'homme et la femme n'ont pris la même entrée ! ».

At the meal of the International Assembly of "Mathématiques sans Frontières", a Brazilian, a Swiss and a German dine together, and with their wives. When ordering, one man and one woman each choose a tart flambée, one man and one woman each choose an Alsatian salad, and one man and one woman each choose snails. The German's wife had a tart flambée. The Brazilian, who had an Alsatian salad, said to him: "It's curious. In each couple, the man and the woman have had different dishes!".



**À l'aide des renseignements donnés, dire ce que chaque homme a choisi comme entrée.**

\*\*\*\*\*

Durante la cena dell'Assemblea Internazionale di Matematica senza Frontiere in Alsazia, un

brasiliano, uno svizzero e un tedesco cenano assieme con anche le loro mogli. Quando effettuano l'ordinazione iniziale un uomo e una donna prendono entrambi una *tarte flambée*, un uomo e una donna ordinano entrambi un'insalata alsaziana e un uomo e una donna ordinano entrambi delle lumache. La moglie del tedesco ha ordinato una *tarte flambée*. Il brasiliano che ha ordinato l'insalata le dice "E' curioso, in ogni coppia, l'uomo e la donna hanno ordinato piatti diversi!"

**In base alle informazioni fornite, individuate la scelta di ogni uomo, giustificando la vostra risposta.**

**Using the information provided, identify what each man chose. Justify your answer.**

\*\*\*\*\*

En la comida de la Asamblea Internacional de Matemáticas sin Fronteras en Alsacia, un brasileño, un suizo y un alemán cenan juntos y con sus esposas.

Cuando hacen el pedido, un hombre y una mujer piden cada uno una tarta flambeada, un hombre y una mujer piden cada uno una ensalada alsaciana y un hombre y una mujer piden cada uno caracoles.

La esposa del alemán ha elegido una tarta flambeada. El brasileño, que ha elegido una ensalada alsaciana, dice entonces: «¡Qué curioso, en cada pareja, el hombre y la mujer han elegido platos diferentes!».

**Con la ayuda de estos datos, indica lo que ha elegido cada hombre. Justifica la respuesta**



### Aufgabe 2 5 Punkte

## Die Daltons

Die Daltons sind im Begriff, eine Bank zu überfallen. Sie haben folgende Hinweise für die Zahlenkombination des Safes erhalten:

- Die Kombination besteht aus drei verschiedenen Ziffern.
- Keine der Ziffern ist 0.
- Die kleinste Ziffer steht am Anfang, die größte am Ende.
- Die Summe der drei Ziffern ist 17.
- Wenn man zwei Ziffern multipliziert und die dritte addiert, erhält man eine Quadratzahl.

**Welche Zahlenkombinationen ergeben sich aus diesen Hinweisen? Begründet eure Antwort.**

**Aufgabe 3**  
7 Punkte

## Glücklich und fröhlich

Hier ist ein Algorithmus in drei Schritten:

Schritt 1: Wähle eine positive ganze Zahl.

Schritt 2: Quadriere die Ziffern dieser Zahl, addiere die Quadrate und notiere das Ergebnis.

Schritt 3: Wiederhole Schritt 2 mit der Zahl, die du gerade notiert hast.

Wenn man diesen Algorithmus ausführt, erhält man eine Zahlenfolge.

Wenn in der Zahlenfolge eine 1 erscheint, ist der Algorithmus beendet.

Die Ausgangszahl nennt man dann eine „glückliche Zahl“.

Wenn in der Zahlenfolge eine Zahl zum zweiten Mal erscheint, ist der Algorithmus auch beendet.

Die Ausgangszahl nennt man dann eine „fröhliche Zahl“.

Hier sind zwei Beispiele:

Ausgangszahl 70:  $7^2 + 0^2 = 49$ ;  $4^2 + 9^2 = 97$ ;  $9^2 + 7^2 = 130$ ;  $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$ ;  $1^2 + 0^2 = 1$ .

-> Es erscheint eine 1. 70 ist also eine „glückliche Zahl“.

Ausgangszahl 40: Man erhält die Zahlenfolge **16 – 37 – 58 – 89 – 145 – 42 – 20 – 4 – 16**.

-> Die Zahl 16 erscheint zum zweiten Mal. 40 ist also eine „fröhliche Zahl“.

**Bestimmt die fünf „glücklichen Zahlen“, die kleiner sind als 20.**

**Thomas sagt, dass 2021 ein „glückliches Jahr“ ist, weil 2021 ja eine „glückliche Zahl“ ist.**

**Hat er Recht? Falls nicht, welches ist das nächste „glückliche Jahr“? Begründet eure Antwort.**



**Aufgabe 4**  
5 Punkte

## Ganz in weiß

Die Spielsteine in der Abbildung haben eine weiße und eine schwarze Seite.

Bei jedem Stein steht auf der Vorder- und der Rückseite dieselbe Zahl.

Zu Beginn des Spiels liegen die Steine so, wie es in der Abbildung dargestellt ist.

Wenn man einen Stein umdreht, drehen sich die beiden benachbarten Steine automatisch auch um. Wenn bei allen Spielsteinen die weiße Seite oben liegt, ist das Spiel beendet und man hat gewonnen.

**Wie kann man mit möglichst wenigen Spielzügen gewinnen?**

**Aufgabe 5**  
7 Punkte

## Längs und quer

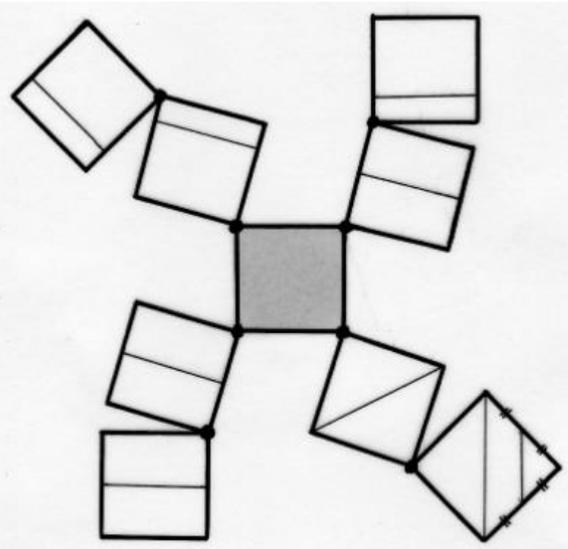
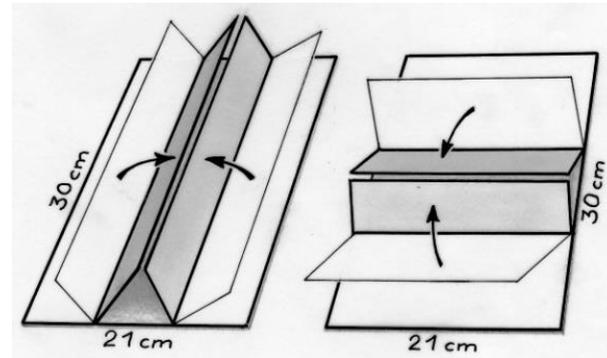
Aus zwei Blättern Kartonpapier, die 30 cm lang und 21 cm breit sind, werden wie in der Abbildung dargestellt zwei verschiedene Prismen gefaltet, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.

Das erste Blatt wird längs gefaltet, das zweite quer. Bei beiden Blättern entstehen dadurch jeweils drei kongruente Rechtecke.

**Berechnet das Volumen der beiden Prismen.**

**Welches Prisma hat das größere Volumen?**

**Berechnet das Verhältnis, in dem die beiden Volumen stehen.**



**Aufgabe 6**  
5 Punkte

## Quadratische Überdeckung

Die Quadrate in dieser Figur bestehen aus transparentem Papier. Sie können sich um einen ihrer Eckpunkte drehen und einander so überlagern, dass sie das Quadrat in der Mitte genau überdecken.

Für die auf den Quadraten eingezeichneten Strecken gilt:

Entweder verlaufen sie durch Eckpunkte der Quadrate oder Mittelpunkte der Seiten oder sie teilen die entsprechenden Quadratseiten im Verhältnis drei Viertel zu ein Viertel.

Die Quadrate haben die Seitenlänge 8 cm und werden so gedreht, dass sie das Quadrat in der Mitte genau überdecken

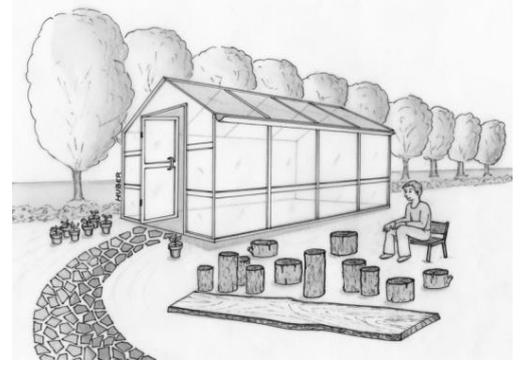
**Zeichnet die Figur, die auf diese Weise entsteht.**

**In wie viele Bereiche wird das Quadrat in der Mitte unterteilt?**

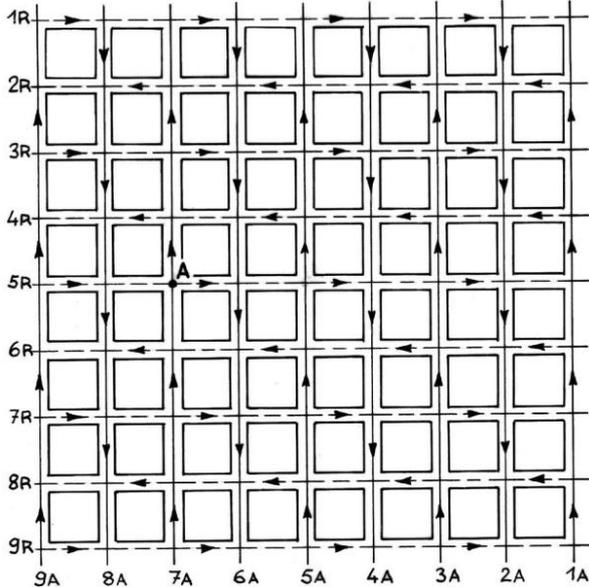
**Aufgabe 7**  
**7 Punkte**

# Heimwerken

Elias hat in seiner Gartenhütte ein langes Brett und zwölf Teile eines zersägten Baumstamms gefunden. Daraus möchte er eine Ablage für seine Pflanztöpfe bauen, indem er das Brett auf Stützen befestigt, die aus mehreren aufeinandergestellten Teilen des Baumstamms bestehen. Die Teile des Baumstamms sind unterschiedlich hoch: Zwei Teile sind 10 cm hoch, drei Teile 20 cm, vier Teile 30 cm und jeweils ein Teil 40, 50 und 60 cm. Elias verwendet alle zwölf Teile des Baumstamms. Kein Teil wird zersägt. Jede Stütze besteht aus mindestens zwei Teilen, und natürlich sind alle Stützen gleich hoch.



**Wie viele Stützen für das Brett baut Elias aus den zwölf Teilen des Baumstamms? Gebt für jede Stütze an, aus welchen Teilen sie besteht. Begründet eure Antwort,**



**Aufgabe 8**  
**5 Punkte**

# Mickey moves

In der Abbildung seht ihr den schachbrettartigen Grundriss einer amerikanischen Großstadt. Er besteht aus quadratischen Blöcken der Seitenlänge 100 m. Jeder Straßename besteht aus einer Zahl und einem Buchstaben. Die A-Straßen verlaufen in Nord-Süd-Richtung, die R-Straßen in Ost-West-Richtung. Alle Straßen sind Einbahnstraßen. Die Fahrtrichtung für jede Straße wird im Plan durch einen Pfeil angegeben.



Mickey zieht um. Seine alte Wohnung liegt im Punkt A (7A / 5R), an der Kreuzung der Straßen 7A und 5R. (siehe Abbildung). Seine neue Wohnung liegt wieder an einer Kreuzung. Beim Umzug fährt Mickey mehrmals von seiner alten in seine neue Wohnung und zurück. Er hält sich natürlich an die offizielle Fahrtrichtung jeder Straße und nimmt immer den kürzesten Weg. Trotzdem bemerkt er, dass der Hinweg immer doppelt so lang ist wie der Rückweg.

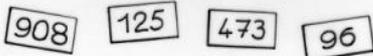
**An welcher Kreuzung könnte Micekys neue Wohnung liegen? Gebt drei Möglichkeiten an (als Koordinaten (xA / yR)).**

**Aufgabe 9**  
**7 Punkte**

# Malotterie



Malo ist der Präsident eines großen Basketballvereins, der in diesem Jahr sein 50-jähriges Bestehen feiert. Zu diesen Anlass organisiert Malo eine Lotterie. Der Hauptgewinn ist eine Reise nach Berlin. Malo hat 1000 Lose mit den Nummern 1 bis 1000 drucken lassen. Er schaut sich die Lose genau an und stellt fest: „Bei den Losen 908 und 806 gibt es ein Problem. Da könnten ja zwei verschiedene Personen das Gewinnerlos für den Hauptgewinn vorzeigen.“

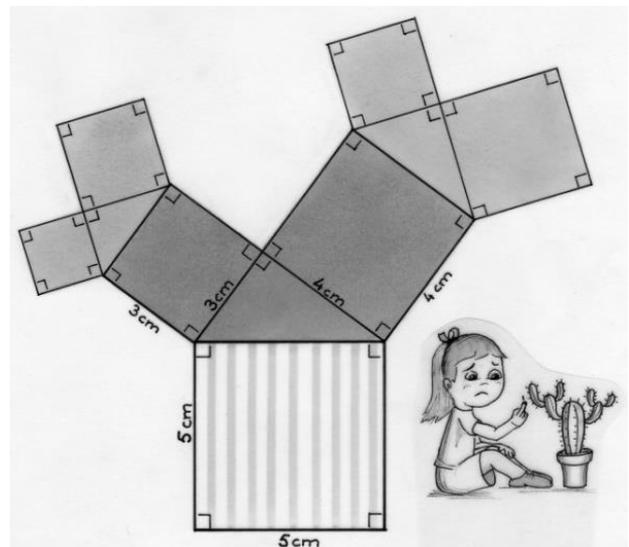


**Erklärt, welches Problem Malo bei den beiden Losen festgestellt hat. Bei welchen anderen Losen gibt es dieses Problem noch? Gebt alle Paare an.**

**Aufgabe 10**  
**10 Punkte**

# Cactus fractalus

Die Abbildung zeigt eine Art geometrischen Kaktus. Sein Stamm besteht aus einem Quadrat der Seitenlänge 5 cm. In der ersten Woche wächst der Kaktus um ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm sowie um zwei Quadrate. Der Kaktus hat jetzt zwei Äste. (siehe Abbildung). In der zweiten Woche wachsen aus jedem Ast ein rechtwinkliges Dreieck und zwei Quadrate. (siehe Abbildung) In der dritten Woche geht das Wachstum nach demselben Prinzip weiter: Aus jedem Ast wachsen ein rechtwinkliges Dreieck und zwei Quadrate. Der Kaktus besteht aus Quadraten und aus zueinander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken.



**Wie sieht der Kaktus nach drei Wochen aus? Zeichnet ihn in den angegebenen Maßen auf euer Antwortblatt. Berechnet den Flächeninhalt der Quadrate und markiert flächengleiche Quadrate in derselben Farbe.**

# Klasse 10

## Aufgabe 11 5 Punkte

Passt!

Charlotte geht zur Post und kauft Briefmarken:

- „Ich hätte gerne für 10 € Briefmarken im Wert von 10, 20 und 50 Cent.“
- „Ja, aber wie viele von jeder Sorte?“ fragt der Herr am Schalter.
- „Bitte zehn Mal so viele 10-Cent-Briefmarken wie 20-Cent-Briefmarken.“



**Wie viele Briefmarken von jeder Sorte bekommt Charlotte? Erklärt eure Antwort.**

## Aufgabe 12 7 Punkte

Rund um die Insel



In seinem Ruderboot umrundet Amalio eine kleine Insel in der Karibik in einer Stunde. Seine Freundin Tissia braucht mit ihrem neuen Motorboot 10 Minuten.

Die beiden fahren am selben Ort gleichzeitig los und nehmen dieselbe Route.

**Wie viele Runden um die Insel hat Tissia gedreht, wenn Amalio die Insel einmal umrundet hat?**

**Und wie viele Minuten danach wird Tissia Amalio dann zum nächsten Mal überholen? Begründet eure Antworten.**

## Aufgabe 13 10 Punkte

Der Couchtisch

Laura hat den abgebildeten Couchtisch gebaut. Er besteht aus einer runden Glasplatte und einem Sockel. Den Sockel hat Laura aus sechs quaderförmigen Holzleisten angefertigt, die jeweils 55 cm lang, 5 cm breit und 5 cm tief sind. Diese Holzleisten hat Laura paarweise senkrecht zueinander montiert.

An den Punkten A, B und C hat Laura die Glasplatte auf dem Sockel befestigt. (siehe Abbildung). Die Punkte A, B und C sind jeweils gleich weit vom Mittelpunkt der kreisförmigen Glasplatte entfernt. Der Abstand zwischen dem Punkt A und dem Rand der Glasplatte beträgt 10 cm.

**Was für ein besonderes Dreieck ist das Dreieck ABC? Bestimmt seine Maße.**

**Berechnet den Radius der Glasplatte.**

**Begründet eure Antworten.**

