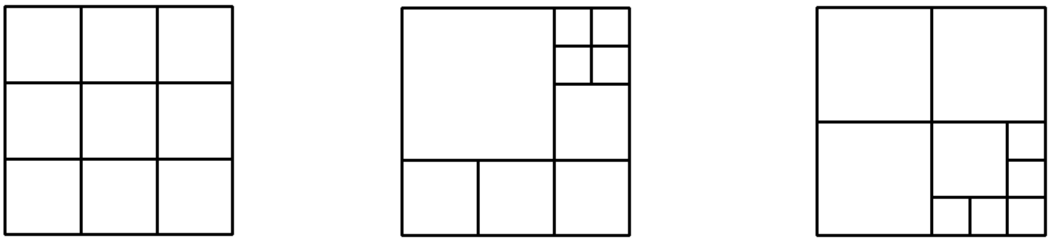
Corrigé de l'épreuve définitive de mars 2001

Exercice 1 : A ton tour

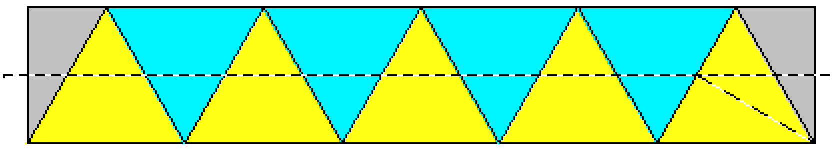
Après la 1ère répartition des 25 cartes en tas de 5 cartes et l'indication de François, Nicolas prend le tas montré par François en le plaçant au milieu du paquet. Les cartes de ce tas "médian" se trouveront lors de la 2ème répartition entre la 11ème et la 15ème carte soit dans la 3ème ligne de chaque nouveau tas. (Chaque tas précédent "colonne" devient une ligne) La deuxième indication de François détermine la carte qui se trouve au milieu du tas montré.

Exercice 2 : Famille de carrés



$9 \times 2^2 = 6^2$ $\quad$ $1 \times 4^2 + 4 \times 2^2 + 4 \times 1^2 = 6^2$ $\quad$ $3 \times 3^2 + 1 \times 2^2 + 5 \times 1^2 = 6^2$

Exercice 3 : Hexagami



Une construction précise, comme celle à l'échelle ci-contre, montre que la bande de papier contient 10 triangles équilatéraux dont 6 forment l'hexagone régulier. Prouvons que la longueur de la bande est exactement égale à 5 fois le côté des triangles équilatéraux.

Notons a le côté d'un triangle équilatéral.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (= 3,6 cm). D'où $a = \dfrac{2\,h}{\sqrt{3}}$ et $5a = \dfrac{10\,h}{\sqrt{3}} = \dfrac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$. CQFD

Donc l'aire de l'hexagone régulier est $\mathcal{A} = \dfrac{6}{10} \times 12\sqrt{3} \times 3{,}6 = 25{,}92\sqrt{3} \approx 44{,}9$ cm^2.

Exercice 4 : Le plein de points

La boîte contient : 2×(3×2+3×1+2×1) = 22 dés "faces" n'ayant qu'une face visible, on choisit "6" ;
4×(3+2+1) = 24 dés "arêtes" ayant deux faces visibles, on choisit "6 et 5" ;
8 dés "sommets" ayant trois faces visibles, on choisit "6, 5 et 4".

Cela donne : 22 × 6 + 24 × (6+5) + 8 × (6+5+4) = 516 points visibles en tout.

Exercice 6 : J'aimerais tant voir Syracuse

Le tableau suivant illustre une des présentations possibles.

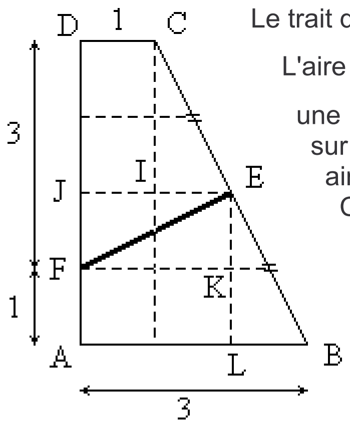
s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	s18	s19	s20	s21	s22	s23	s24	s25
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4 2 1 4 2 1	1	10 5 16 8 4 2			3	22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5		28 14 7			6			46 23 70 35 106 53 160 80 40			9	58 29 88 44 22 11		64 32 16			12	76 38 19
s1	s1	s2 s1	s1	s3 s1	s3 s1	s5 s1	s3 s1	s7 s1	s7 s1	s7 s1	s6 s1	s7 s1	s9 s1	s7 s1	s3 s1	s7 s1	s9 s1	s7 s1	s7 s1	s3 s1	s19 s1	s15 s1	s12 s1	s19 s1

Au moins jusqu'à 25, toutes les suites à partir d'un rang sont périodiques de période 4, 2, 1.

Remarque : On peut proposer aux élèves de continuer jusqu'à 50. On rencontre ainsi des suites pour lesquelles la partie non-périodique est étonnamment longue par exemple 27, 31, 41 et 47.

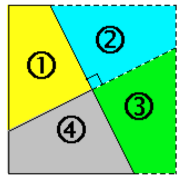
Cette propriété n'est toujours pas démontrée.

Exercice 5 : Aire coupable



Le trait de coupe est [EF] avec E milieu de [BC] et F sur [AD] tel que AF = 1.

L'aire du trapèze ABCD est en dm^2 : $\frac{(3+1)\times 4}{2}$ = 8 donc chacune des deux parts doit avoir une aire de 4. En pavant le trapèze ABCD par des carrés de 1dm de côté tel qu'indiqué sur la figure ci-contre, on voit de façon évidente que :
aire ABEF = aire CDFE = 4. De la disposition des triangles rectangles isométriques CIE et FJE par rapport au rectangle CDJI et de celle de EFK et BLE par rapport à AFKL, il découle que les quadrilatères ABEFet CDFE ont en plus leurs angles respectivement égaux. Ils ont donc la même forme.

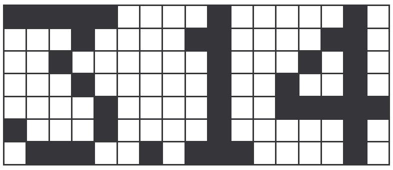


Remarque : En complétant le trapèze par symétrie par rapport à E, on obtient un découpage du carré en quatre parts superposables. Plus généralement : un carré de centre O est partagé en quatre parts égales par tout couple de droites perpendiculaires en O.

Exercice 7 : Oh mon beau miroir

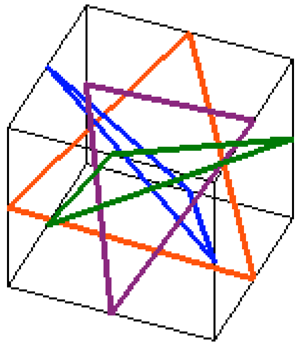
1	5	9	6	■
■	3	7	0	8
4	5	■	■	2
0	■	8	3	9
7	4	1	2	6

Exercice 8 : www.cache.cache

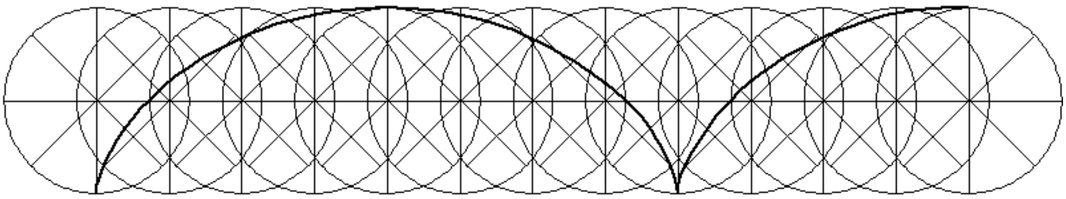


Le message de Robert est 3,14 soit la plus connue des valeurs approchées du nombre π.

Exercice 12 : Mise en boîte



Exercice 9 : Cyclopède



Exercice 10 : La curedentrice

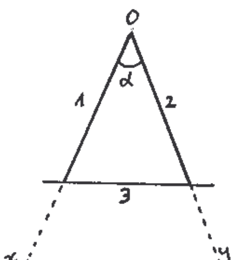


figure 1

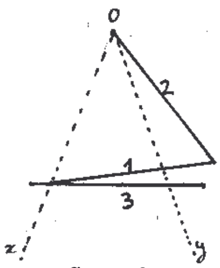


figure 2

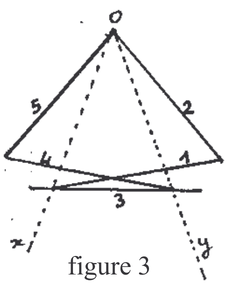


figure 3

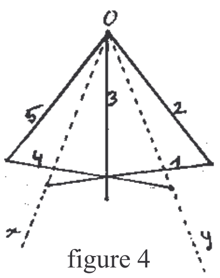


figure 4

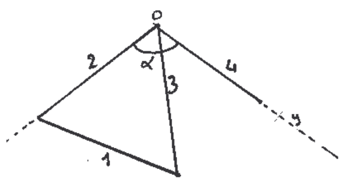
1er cas : $\alpha < 60°$

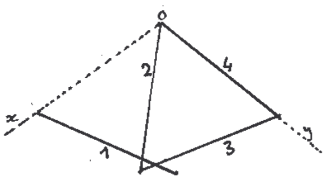
Figure 1: On place d'abord les cure-dents 1 et 2 sur les côtés de l'angle puis le cure-dents 3.

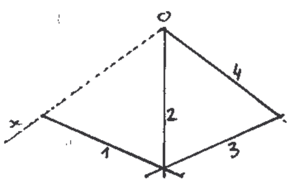
Figure 2 : Le cure-dents 3 reste en place ; on dispose 1 et 2 de façon à former avec l'ancienne position de 1 un triangle équilatéral.

Figure 3 : On dispose 4 et 5 de façon à former avec l'ancienne position de 2 un triangle équilatéral.

Figure 4 : 3 placé sur le sommet de l'angle α et le point d'intersection de 4 et 1 matérialise la bissectrice de α.







2ème cas : $60° < \alpha < 120°$

1ère figure : On place d'abord les cure-dents 1, 2 et 3 pour former un triangle équilatéral. Et on place le cure-dents 4.

2ème figure : 1 et 4 restent en place ; on dispose 2 et 3 de façon à former un autre triangle équilatéral.

3ème figure : 2 placé sur le sommet de l'angle α et le point d'intersection de 1 et 3 matérialise la bissectrice de α.

Remarque: Pour des angles entre 120° et 180°, il suffit de construire un losange dont deux côtés consécutifs sont sur les deux côtés de l'angle.

Exercice 11 : Quel fléau ?

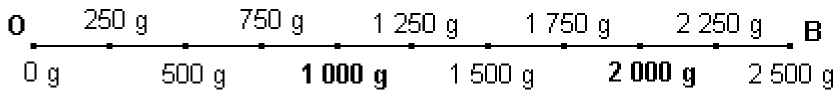
m = 2 kg = 2 000 g. Posons OA = x donc OE = AE – AO = 20 – x.
La relation OA $\times$ m = OE $\times$ 500 devient $x \times 2\,000 = (20 - x) \times 500$ soit $2\,000\,x = 10\,000 - 500\,x$
D'où $2\,500\,x = 10\,000 \Leftrightarrow x = 4$. Le point O sur [AB] est tel que AO = 4 cm et OE = 20 – 4 = 16.
La graduation se fait sur [OB] donc sur 20 cm (en effet OB = AB – AO = 24 – 4).

On sait à présent que : $4 \times m = \text{OE} \times 500$ donc $\text{OE} = \dfrac{4\,m}{500} = \dfrac{m}{125}$.

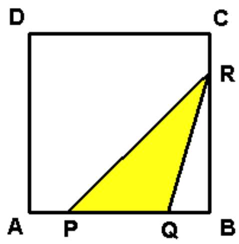
Il reste à trouver, avec cette relation $\text{OE} = \dfrac{m}{125}$, les différentes valeurs de OE comprises entre 0 et 20 cm pour m variant tous les 250 g.

m en g	0	250	500	750	1 000	1 250	1 500	1 750	2 000	2 250	2 500
OE en cm	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

graduation
à l'échelle 1/2



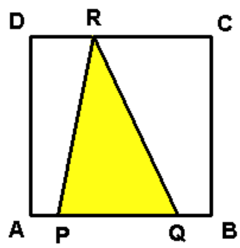
Exercice 13 : Des idées et du pétrole

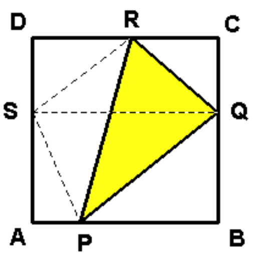


Appelons ABCD le carré de côté 1 et PQR le triangle. (On écarte le cas où les points P,Q et R sont alignés : l'aire serait nulle).

1er cas : deux des points P, Q, R sont sur un même côté et le troisième sur un autre côté :

- Si P et Q sont sur [AB] et R sur [BC], l'aire de PQR est égale à 0,5 $\times$ PQ $\times$ RB. PQ est maximal et vaut 1 si P est en A et Q en B . RB est maximal et vaut 1 si R est en C. Dans ce cas, l'aire est maximale et vaut 0,5 si P est en A, Q en B et R en C.
- Si P et Q sont sur [AB] et R est sur [CD], alors on prouve de la même façon que l'aire est maximale (et égale à 0,5) si P est en A et Q en B.





2ème cas : P, Q et R sont sur 3 côtés différents : Par exemple P sur [AB], Q sur]BC[et R sur [CD] avec [PR] différent de [AD].

Soit S le point de]DA[tel que (SQ) soit parallèle à (AB) alors l'aire de PQR est strictement inférieure à l'aire de PQRS qui est égale à 0,5.

En conclusion, l'aire est maximale si et seulement si les points P et Q sont deux sommets consécutifs du carré et R un point du côté opposé.