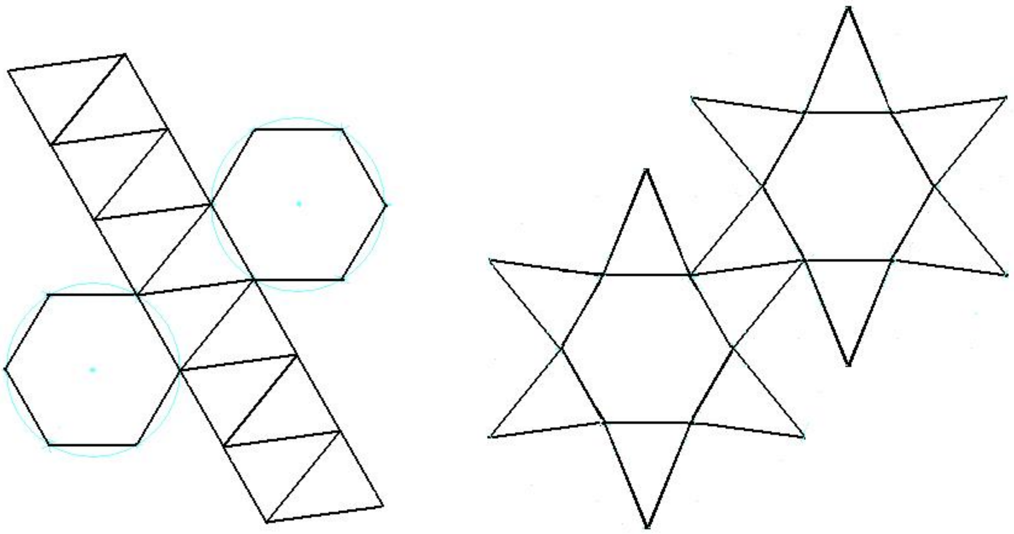
Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 7 février 2006

Exercice 1 : Pom-pom girls

Sur la figure recomposée, on compte 12 girls, contre 13 sur la figure initiale, on pourrait donc penser que 13 = 12.
Une observation plus précise permet de remarquer que chaque girl de la 1$^{\text{ère}}$ figure présente un défaut : la 1$^{\text{ère}}$ n'a pas de genoux, la 2$^{\text{ème}}$ pas d'épaules etc… : **il manque à chacune 1/13$^{\text{ème}}$ de son intégrité**. Le réagencement des pièces A et B et C fournit 12 girls entières, d'où l'égalité : $\boxed{13\times\frac{12}{13} = \mathbf{12}}$. Rien ne se perd , rien ne se crée !

Exercice 2 : Antiprisme

Voici 2 patrons possibles, parmi d'autres :



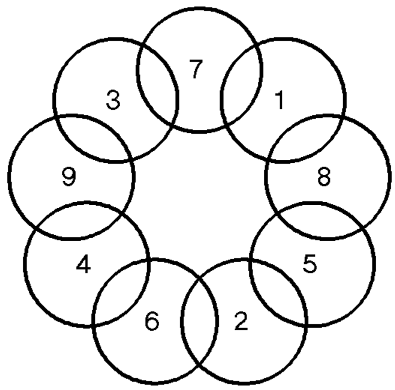
Exercice 3 : A l'affiche

En notant x le nombre total d'animaux, il vient :
$(x–42) + (x–32) + (x–47) + (x–44) = x$
Alors $3x = 165$, donc $x = 55$.
Le nombre de cochons d'Inde est :
55–42 = **13 ; de même, il y a 23 poissons, 8 chats et 11 chiens.**

Affiche du lendemain:

Non-cochons: 33;	**non-poissons: 28;**
non-chats: 40;	**non-chiens : 34**

Exercice 4 : Vus de dos



Exercice 5 : Paires et Milieux

Le milieu d'un bipoint a des coordonnées entières ssi les abscisses des deux points sont de même **parité** et leurs ordonnées aussi.

On peut placer 4 points en évitant cette situation : par exemple : A:(P;P) ; B:(P;I) ; C:(I;P) ; D:(I;I), mais dès qu'on voudra placer un 5$^{\text{ième}}$ point, ses coordonnées appartiendront à l'une de ces 4 catégories.

Exercice 6 : Le prix des prix

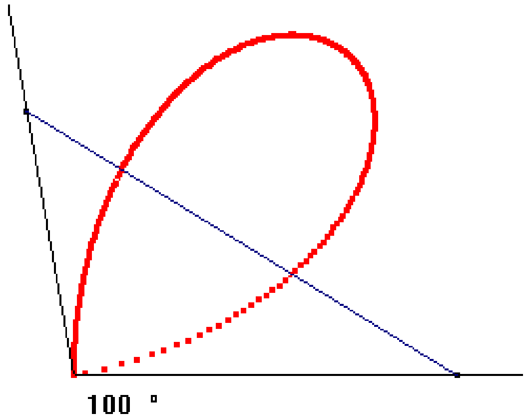
En notant c le nombre de coupes, t le nombre de tee-shirts et m le nombre de lots de 5 médailles on obtient le système diophantien suivant :

$$\begin{cases} 23c + 7t + 4m = 150 \\ c + t + 5m = 50 \end{cases}$$

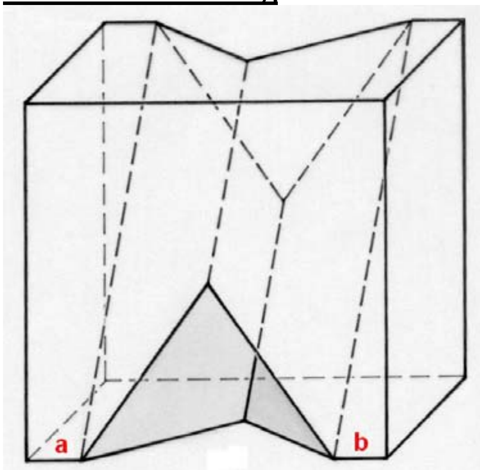
En faisant varier c de 1 à 6, on est conduit à l'unique solution : (c ; t ; m) = (3 ; 7 ; 8) ce qui correspond à :

3 coupes, 7 tee-shirts et 40 médailles distribués.

Exercice 7 : Larme de crocodile



Exercice 8: Piercing



$a = b \approx 15\%$ arête du cube

Exercice 9 : Le fluide affleure

Soient a et b les longueur et largeur de la base du récipient. Le volume d'eau peut s'écrire :
V = 10 (ab –100) ou V = 20 (ab – 400).
De l'égalité de ces expressions, on tire:
ab = 700.
Le volume d'eau est donc de 6000 cm^3 ou **6 Litres**.
700 peut s'écrire de neuf façons en produit de deux entiers, mais a et b doivent être supérieurs à 20 pour que l'immersion du grand cube soit possible, donc:
a = 28 et b = 25
(a = 35 et b = 20 pourra être acceptée comme 2$^{\text{ième}}$ solution, quoique le grand cube ne rentre pas bien dans l'aquarium dans ce cas)

Exercice 10 : à faire à cheval

On obtient un octaèdre d'arête 5 cm.
Il est constitué de 2 pyramides à bases carrées de côté 5 et de hauteur $2{,}5\sqrt{2}$ chacune.

D'où le calcul du volume :

$$V = 2 \times \frac{25 \times 2{,}5\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{125\sqrt{2}}{3}}$$

Le volume est d'environ 59 cm^3.

Spécial Secondes

Exercice 11 : Mot de passe oublié ?

Le nombre cherché est $\boxed{\mathbf{2^{30} = 1\,073\,741\,824}}$.

En effet, $\mathbf{2^{30}}$ est le carré de $\mathbf{2^{15}}$, le cube de $\mathbf{2^{10}}$ et $2^{30} = (2^6)^5$

C'est le seul nombre compris entre 1000 et 2 milliards qui soit à la fois un carré , un cube et une puissance cinquième parfaits. On ne demande pas ici de prouver cette unicité.

Exercice 12 : Math express

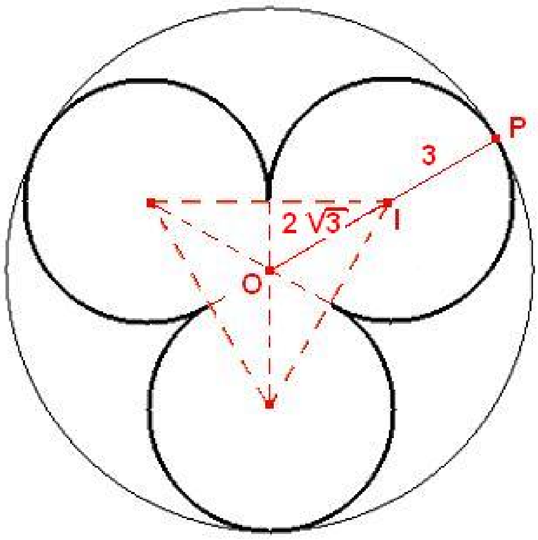
Le train se déplace de 60 m en 2 s. En 72 s, il parcourt donc 2160 m.
Dans le repère de Zoé, c'est le clocher qui a parcouru cette distance.

Si on note d la distance minimale de Zoé au clocher, il vient : $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1{,}20}{2160}$

Donc $d = 1800$.

Le clocher se trouve à environ 1 800 m de la voie ferrée.

Exercice 13 : De Budapest



Les centres des 3 petits cercles forment un triangle équilatéral de côté $a = 2\times 3 = 6$cm.
Le centre O du grand cercle est aussi centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre de ce triangle.
D'après le théorème de Pythagore, la longueur d'une médiane de ce triangle est alors:

$\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.

O est situé aux deux tiers de cette médiane,

donc : OI $= \dfrac{2}{3} 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

Ainsi le rayon du grand cercle est :

$\boxed{\mathbf{OP = OI + IP = 2\sqrt{3} + 3\ (\approx 6{,}5\ cm)}}$.