Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 14 mars 2013

Exercice 1 - *Bien vu* - 7 points

Concernant la couleur, il y a sept possibilités d'attribuer les chapeaux :

Possibilité	1	2	3	4	5	6	7
Anatole	R	R	R	R	V	V	V
Michel	R	R	V	V	R	R	V
Thomas	R	V	R	V	R	V	R

Trois cas sont à éliminer :

- ✓ Cas 4 : Anatole répond « non », s'il voit 2 chapeaux verts, c'est qu'il porte un chapeau rouge, il aurait dû répondre « oui », donc impossible.
- ✓ Cas 6 : Michel répond « non », s'il voit 2 chapeaux verts, c'est qu'il porte un chapeau rouge, il aurait dû répondre « oui », donc impossible.
- ✓ Cas 2 : Cas épineux… Michel, voyant un chapeau vert sur Thomas, doit se dire "Si j'ai aussi un chapeau vert, alors Anatole aurait su qu'il avait un rouge et aurait répondu OUI. J'ai donc un rouge" et Michel aurait annoncé OUI, donc impossible.

Dans les quatre cas restants, Thomas a un chapeau rouge, il n'a pas besoin de voir la couleur des chapeaux pour répondre OUI.

Exercice 2 - *Mathémagique* - 5 points

Dans le tableau donné, la somme de 3 nombres respectant la consigne est toujours 27.
On remarque également qu'on passe d'une ligne à l'autre (ou d'une colonne à l'autre d'ailleurs) en ajoutant un même nombre aux trois nombres qui la composent.
En utilisant les propriétés précédentes d'un tel tableau et en vérifiant les nombres de la grille proposée par les élèves soient tous différents, on pourra affirmer que la grille convient bien.

Exercice 3 - *Antisèche* - 7 points

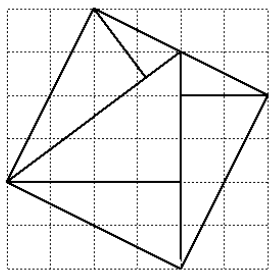
Deux cas se présentent :

- ✓ Le 2ème rectangle vient de passer au blanc, il reste donc les deux tiers du réservoir et $252,6 \times 2 = 505,2$ km à rouler, dont les trois quarts avant le signal "réserve", soit $\frac{3}{4} \times 505,2 = 378,9$ km.
- ✓ Le 3ème rectangle va passer au blanc juste après la lecture proposée de l'affichage, il reste donc l'autre moitié du réservoir et 252,6 km à rouler, dont les deux tiers avant le signal "réserve", soit $\frac{2}{3} \times 252,6 = 168,4$ km.

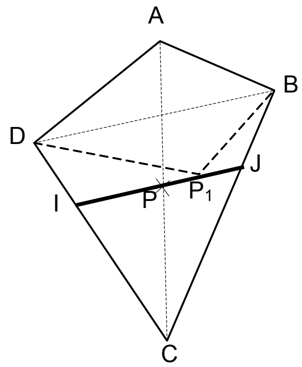
En conclusion,
dans les conditions données, on peut rouler **au minimum 168,4 km et au maximum 378,9 km.**

Exercice 4 - *Triangles au carré* - 5 points

On pourrait d'abord calculer l'aire totale des triangles donnés et on remarquerait que la longueur du côté du carré est $\sqrt{20}$ cm, on retrouve cette longueur pour l'hypoténuse du triangle ayant pour côtés de l'angle droit 2 cm et 4 cm.
On peut trouver la solution par manipulation.



Exercice 5 - *Partage égalité fraternité* - 7 points



P se trouve au milieu de [AC].
On utilise la propriété suivante : Deux triangles qui ont même base et même hauteur ont la même aire.
De ce fait les triangles APD et DPC ont même aire et les triangles APB et CPB ont même aire. Il en résulte que les quadrilatères ADPB et DPBC ont même aire et le partage est équitable.
L'ensemble des solutions évoqué par Paul est le segment [IJ] dans le quadrilatère ABCD, passant par P et parallèle à [DB].
Explication :
Soit P_1 un point de ce segment. L'aire du triangle BDP_1 est égale à celle du triangle BDP (toujours d'après la même propriété). Donc l'aire du quadrilatère ABP_1D est égale à celle du quadrilatère ABPD, c'est-à-dire à la moitié de celle de ABCD.

Exercice 6 - *Retour vers le départ* - 5 points

On procède à l'envers et par chance, il n'y a qu'une possibilité à chaque manche (un seul nombre impair). On peut s'aider d'un tableau :

	Alex	Claude	Sam	
Fin de la $5^{ème}$ manche	10	9	8	
Fin de la $4^{ème}$ manche	5	18	4	Claude perd
Fin de la $3^{ème}$ manche	16	9	2	Alex perd
Fin de la $2^{ème}$ manche	8	18	1	Claude perd
Fin de la $1^{ère}$ manche	4	9	14	Sam perd
Début de la $1^{ère}$ manche	**2**	**18**	**7**	Claude perd

Exercice 7 - *Dos à dos* - 7 points

- ✓ Supposons l'affirmation 1a vraie, le nombre cherché a deux chiffres. Il est impair (puisque 1b est dans ce cas fausse). C'est aussi un carré (2a vraie car 2b est fausse, le nombre cherché a deux chiffres). Les carrés impairs sont 25 ; 49 et 81 ; or aucun de ces nombres ne vérifie 3a ou 3b. D'où contradiction, notre hypothèse est fausse.
- ✓ 1b est vraie, le nombre est pair. Il ne peut être le produit de deux nombres impairs consécutifs, d'où 4a fausse. Donc 4b vraie, le nombre est égal à un entier au carré plus 1. Il ne peut être égal à un carré, d'où 2a fausse et 2b vraie et le nombre a trois chiffres.
  Les nombres pouvant convenir à ce stade :

  $11^2+1=122$ $\quad 19^2+1=362$ $\quad 27^2+1=730$
  $13^2+1=170$ $\quad 21^2+1=442$ $\quad 29^2+1=842$
  $15^2+1=226$ $\quad 23^2+1=530$ $\quad 31^2+1=962$
  $17^2+1=290$ $\quad 25^2+1=626$

  Tous les nombres étant pairs, ils ont plus de 2 diviseurs, donc 3b est fausse et 3a vraie, l'écriture du nombre contient un 7 : seuls 170 et 730 conviennent. Aucun des deux n'est divisible par 11, d'où 5a est fausse et 5b doit être vraie : $730 = 9^3 + 1$.
  Je suis 730 !

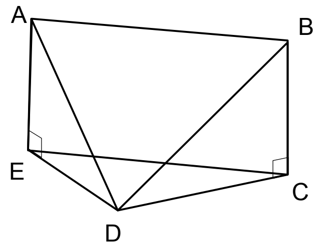
Bien sûr d'autres approches de la solution existent !!!

Exercice 8 - *C'est du billard* - 5 points

Total des points des 15 boules : 120.
Le total des 6 boules de points les plus élevés est 75. Il faut donc au moins 7 boules gagnées à Bonnie. Or, pour que Bonnie gagne avec moins de boules que Clyde il lui en faut au plus 7 : Bonnie a donc gagné exactement 7 boules. En partant avec les boules de points les plus élevés et en ajustant, on trouve les 5 répartitions possibles :

$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 5 = 80$
$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 9 + 6 = 80$
$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 8 + 7 = 80$
$15 + 14 + 13 + 12 + 10 + 9 + 7 = 80$
$15 + 14 + 13 + 11 + 10 + 9 + 8 = 80$

Exercice 9 - *La digue de Malo* - 7 points



Lily arrive en A. AE = BC = 5 m, hauteur de la digue.
Le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

D'après Pythagore AD = $10\sqrt{2}$ et la pente est $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}353$;

ce qui en pourcentage correspond à une **inclinaison de 35 %.**

Si par contre l'inclinaison doit être de 25 %, $\frac{AE}{AD} = 0{,}25$; AD = $\frac{5}{0{,}25} = 20$.

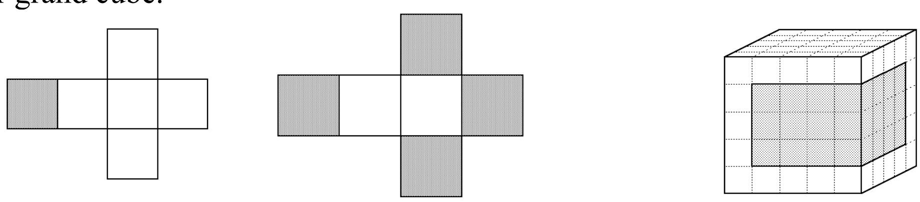
$\cos\widehat{ADB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{ADB} = 60°$.

Lily devra s'écarter de 60°.

Exercice 10 - *Pas peint* - 10 points

Le grand cube doit être composé de plus de 48 petits cubes.

- ✓ Première possibilité: 4 petits cubes sur chaque arête et 64 petits cubes en tout : en peignant par exemple la face du dessus (16 cubes), il en reste 48 sans face peinte.
- ✓ Deuxième possibilité: 5 petits cubes sur chaque arête et 125 petits cubes en tout. Si on reprend le cube précédent et sa partie non peinte, on peut la trouver dans un cube de 125 petits cubes. Il suffit dès lors de peindre 4 faces du grand cube, en en laissant deux contigües non peintes. Ci-dessous les deux patrons et le dessin indiquant la partie non peinte du dernier grand cube.



Exercice 11 - *AG de MsF* - 5 points

On imagine une suite de F et de H sur un cercle.
7 F ont une F à droite : cela signifie qu'il y a 7 fois FF dans la suite et donc qu'il y a aussi 7 F qui ont une F à gauche (se représentant également par FF).
12 F ont un H à droite : il y a 12 fois FH dans la suite et donc également 12 H qui ont une F à gauche.
A sa droite, une F a soit une F soit un H. Il y a donc 7 + 12 =19 F en tout.
A sa gauche, une F a soit une F soit un H. Il y a donc 19 – 7 = 12 F qui un H à gauche (représenté par HF) et donc il y a 12 H qui ont une F à droite. Or ils constituent les $\frac{3}{4}$ des H qui sont donc 16 en tout.

La probabilité pour qu'une femme soit choisie est donc de $\frac{19}{35}$.

Exercice 12 - *Descente ascensionnelle* - 7 points

Soient d le diamètre de l'axe (1 cm) et D celui des roues (10 cm). Soit α l'angle demandé.
Soit ω l'angle de rotation des roues.

Pour le chemin des roues sur le plan incliné on a $s_1 = \pi \times D \times \frac{\omega}{360}$.

En même temps le fil avec le poids est raccourci de $s_2 = \pi \times d \times \frac{\omega}{360}$.

La perte de hauteur d'appareil est $h = s_1 \times \sin\alpha = \pi \times D \times \frac{\omega}{360} \times \sin\alpha$.

Le poids doit rester à la même hauteur : $h = s_2$ et donc $d = D \times \sin\alpha$ et $\sin\alpha = \frac{d}{D} = \frac{1}{10}$.

On trouve $\alpha \approx 6°$.

Plus simplement, on pourra raisonner de la façon suivante :
1 tour correspond à une longueur de roue soit 10π ; chaque tour de la grande roue entraîne un enroulement de π . On se trouve dans la situation d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 10π et un côté d'angle droit π. On en déduira la mesure de l'angle cherché.

Exercice 13 Secondes GT - *C'est inscrit* - 10 points

On pourra utiliser le théorème de Pythagore, ou un calcul d'aires.
Après simplification des calculs, on obtient $xy = 32$.
D'où les solutions :

x	y	Mesures des côtés du triangle
1	32	9 – 40 – 41
2	16	10 – 24 – 26
4	8	12 – 16 – 20

Exercice 13 Secondes Pro
Le gang des souris - 10 points

La partie du chef a une aire de 9 cm² ; il reste donc 24 – 9 = 15 cm² pour les deux autres. C'est-à-dire 7,5 cm² chacun.
Le deuxième partage peut se faire de nombreuses façons en utilisant la fonction *Aire*.