Éléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de découverte de décembre 2021

Exercice 1 – *En cuisine* – 7 points -

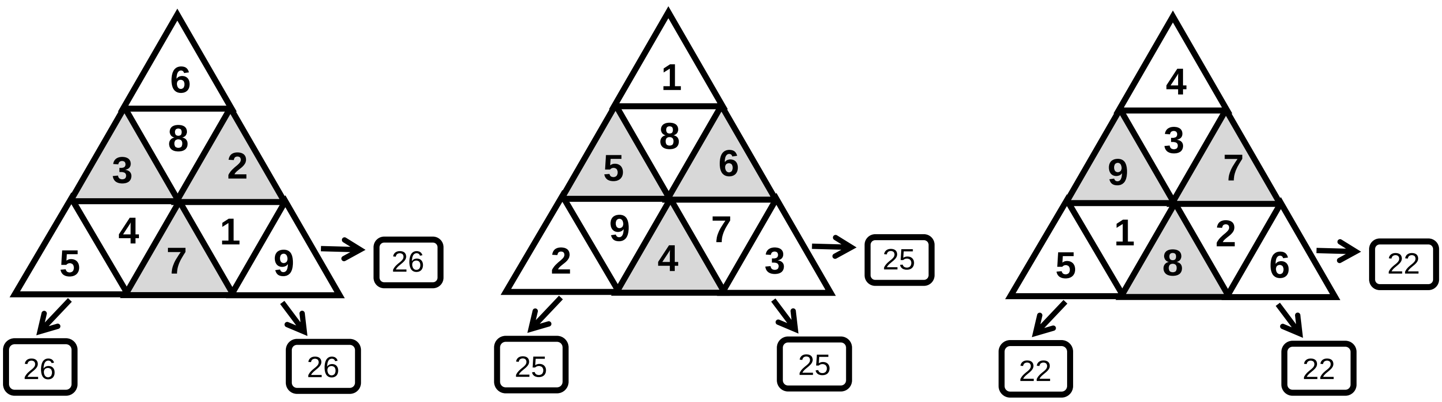
On commence par préparer le Kougelhopf pendant 40 min, puis on le met au four pendant 50 min. Le temps de cuisson permet de préparer le poisson pendant 60 min.
10 min avant la fin de cette préparation, on sort le Kougelhopf du four.
Quand le poisson est prêt, on le met au four 20 min et on commence à préparer le poulet pendant 30 min. On sort le poisson du four 10 min avant la fin de la préparation du poulet. Quand le poulet est prêt, on le met au four 10 min et le repas est prêt.
Le temps total est de 140 min soit 2 h 20 min.

Ceci peut se résumer par le tableau suivant :

Durée (min)	40	50	10	20	10	10
Kougelhopf	Préparation	Cuisson				
Poisson		Préparation		Cuisson		
Poulet				Préparation		Cuisson

Exercice 2 – *En somme* – 5 points -

Si on ajoute les trois sommes attendues on compte deux fois chacun des nombres de 1 à 9, sauf les trois qui sont placés dans les triangles grisés.
Soit S la somme attendue et T la somme des trois nombres des triangles grisés.
On a donc $3S = 2(1 + 2 + ... + 9) - T = 90 - T$
T est donc nécessairement un multiple de 3. Partant de cette remarque, on place dans les cases grisées trois nombres différents de 1 à 9 dont la somme est un multiple de 3.
Ci-dessous trois exemples avec T = 12 et donc S = 26 ; T = 15 et S = 25 puis T = 24 et S = 22.



Il y a bien d'autres solutions.
Chacune des solutions peut être permutée par le groupe des rotations - symétries du triangle équilatéral et à l'intérieur de chaque losange blanc, on peut échanger les deux nombres.

Mathématiques sans Frontières

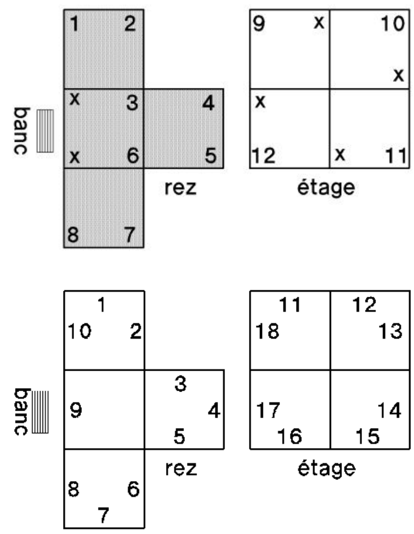
Exercice 3 – *En couples* – 7 points -

La somme de trois nombres de deux chiffres ne peut pas atteindre 300, donc a = 1 ou a = 2
La somme proposée peut s’écrire :
10a + b + 10b + c + 10c + a = 100a + 10b + c, d’où on obtient : b + 10c = 89a

- Si a = 1, b = 9 et c = 8
- Si a = 2, b = 8 et c = 17, ce qui est impossible, d’où a = 1, b = 9 et c = 8.

Le nombre solution de ce problème est 198, qui vaut bien 19 + 98 + 81.

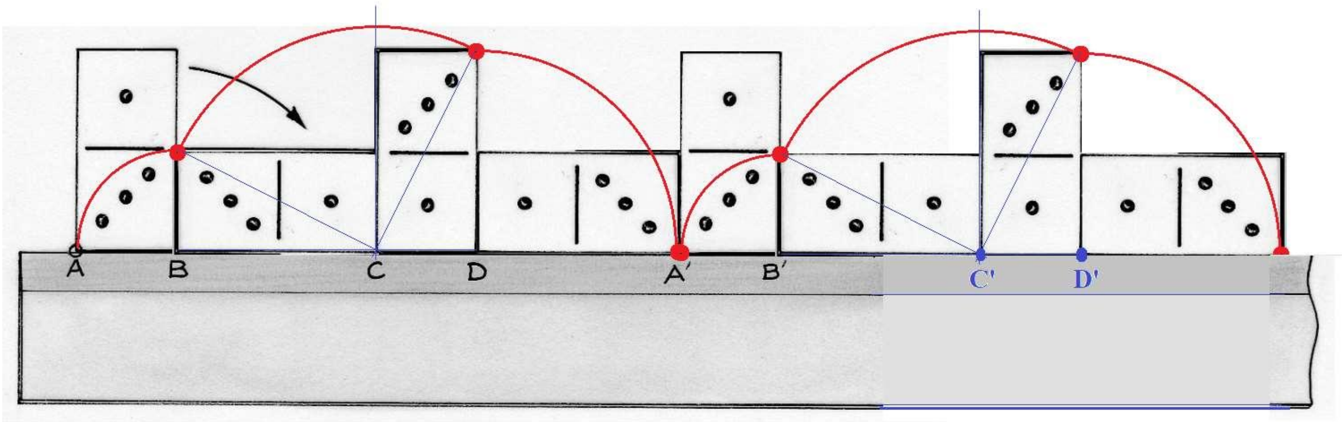
Exercice 4 – *En lumière* – 5 points -



Pour se représenter le bâtiment, on peut s’en faire un croquis qui sera très utile pour les différents dénombrements demandés :

- On le voit bien, la superficie au sol compte 4 carrés (grisés) de 25 m^2 chacun, soit une **superficie totale de 100 m^2**.
- Les douze arêtes verticales sont numérotées de 1 à 12, car les verticales indiquées par x ne sont pas des arêtes de ce polyèdre. Il y a donc 12 arêtes verticales de 5 m, soit une **longueur totale de 60 m**.
- Les faces verticales sont numérotées de 1 à 18. Il y a donc 18 faces verticales de 25 m^2, soit une **superficie totale des façades verticales de 450 m^2**.

Exercice 5 – *En domi-tours* – 7 points -

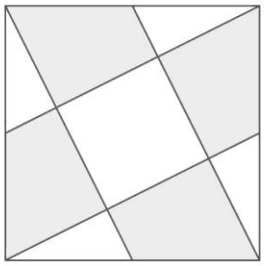


La longueur de la trajectoire est la somme des longueurs de sept arcs de cercles de rayons respectifs :
2 ; $2\sqrt{5}$; 4 ; 0 ; 2 ; $2\sqrt{5}$ et 4.

La longueur exacte de la trajectoire est $(\pi + \pi\sqrt{5} + 2\pi) \times 2$, soit environ 32,90 cm.

Pour le dessin en taille réelle voir en annexe

Exercice 6 – *En déco* – 5 points -



Les cinq dalles ont une aire totale de

$$5 \times 50^2 = 12\,500 \text{ cm}^2$$

L'entrée carrée de la maison de Sacha fait :

$$\boldsymbol{\sqrt{12\,500}\ cm\ \textbf{de côté}}.$$

$$\sqrt{12\,500} \approx 111{,}8 \text{ cm}$$

Voir la taille réelle de l'assemblage sur le document annexe.

Exercice 7 – *En décalé* – 7 points -

Les horloges ne font pas la différence entre matin et après-midi et vont de 12 h en 12 h.
Au bout de 1 heure, il y a un décalage de 3 min entre les deux horloges.
Au bout de 2 heures, il y a 6 min d'écart
On peut en déduire qu'au bout de 20 h, l'écart entre les deux horloges est de 60 min donc de 1 heure.
Les deux horloges indiqueront la même heure lorsque leur écart sera de 12 h soit au bout de
12 x 20 h = 240 h ou encore 10 jours.
Au bout de 10 jours exactement, les deux horloges indiqueront à nouveau la même heure.

Exercice 8 – *En clone* – 5 points -

À la fin de la 5e saison on compte : 2^5 = 32 individus.
À partir de là, le nombre d'individus augmente de 18.
À la fin de la dixième saison on a : 32 + 5 × 18 = 112 individus.

Ceci peut aisément se comprendre à l'aide d'un tableau :

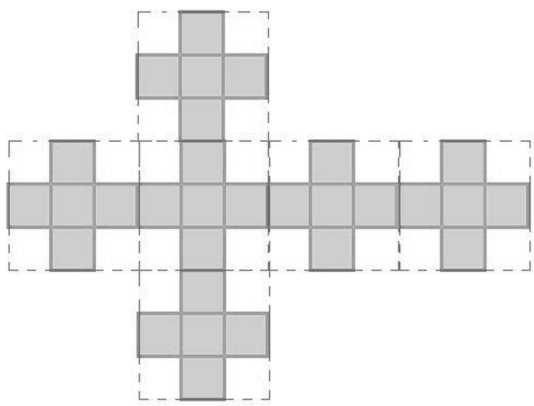
Saisons	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Population	2	4	8	16	32	40	58	76	94	112
Accroissement	+1	+2	+4	+8	+16	+18	+18	+18	+18	+18

Exercice 9 – *En patron* – 7 points -

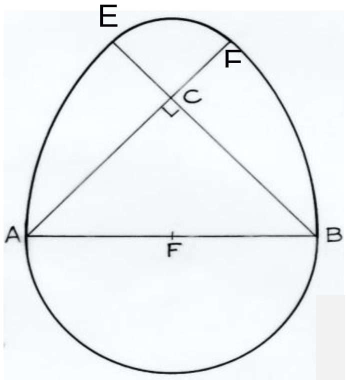
Voici un des patrons possibles.

Cet objet a 30 faces.

Voir le patron en dimensions exactes tenant sur une feuille A4 en annexe.



Exercice 10 – *En oeuf* – 10 points - 3e



Comme le triangle ABC est rectangle isocèle en C alors d'après le théorème de Pythagore, AC = BC = $3\sqrt{2}$ cm
Comme BE = AB = 6 cm ; CE = $6-3\sqrt{2}$ cm
L'arc de cercle EF mesure :

$$\frac{1}{4}\left(6-3\sqrt{2}\right)\times 2\pi = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}\pi$$

L'arc de cercle AB mesure 3π.
L'arc de cercle AE a la même mesure que l'arc FB et chacun vaut :

$$\frac{1}{8}\times 2\times 6\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Le périmètre de l'œuf vaut :

$$\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\pi + 3\pi + 2\times\frac{3}{2}\pi = 9\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$$

La valeur approchée du périmètre de l'œuf vaut 21,6 cm.

Voir la reproduction de l'œuf en vraie grandeur en annexe

Exercice 11 – *En live* – 5 points - 2nde

Plusieurs méthodes pour calculer l'angle $\widehat{\mathrm{DMB}}$ du champ de la caméra.

1ere méthode
Utilisation du théorème de Pythagore :
Dans le triangle MHD : $MD^2 = 20^2 + 10^2 = 500$
Dans le triangle MIB : $MB^2 = 10^2 + 30^2 = 1\,000$
Dans le triangle BDE : $BD^2 = 20^2 + 10^2 = 500$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MDB est rectangle en D.
De plus, il est isocèle.
On en conclut que **$\widehat{\mathbf{DMB}}$ = 45°.**

2e méthode
Par la trigonométrie :

$$\tan\widehat{\mathrm{IMB}} = \tan\widehat{\mathrm{HMB}} = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IM}} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\tan\widehat{\mathrm{HMD}} = \frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{MH}} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

$$\widehat{\mathrm{DMB}} = Arctan\ 3 - \mathrm{Arctan}\ 0{,}5 = 45°$$

D'où la conclusion : **$\widehat{\mathbf{DMB}}$ = 45°.**

Exercice 12 – *En plus* – 7 points - 2nde

Notons n l'entier auquel pense Delphine.
Alors il existe deux entiers a et b tels que :
n + 10 = a^2 et n + 79 = b^2.
Par différence, on obtient :
$b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) = 69$. Or les seules décompositions sont : 69 = 1 x 69 et 69 = 3 x 23.

1er cas :
On a le système $\begin{cases} b + a = 69 \\ b - a = 1 \end{cases}$ dont la solution est b = 35 et a = 34.
On obtient n = $34^2 - 10 = 1\,146$ et n = $35^2 - 79 = 1\,146$

2e cas :
On a le système $\begin{cases} b + a = 23 \\ b - a = 3 \end{cases}$ dont la solution est b = 13 et a = 10.
On obtient n = $10^2 - 10 = 90$ et n = $13^2 - 79 = 90$

Il y a bien deux solutions et Delphine pense soit au nombre 90 soit au nombre 1 146.

Exercice 13 – *En rapport* – 10 points - 2nde GT

Les triangles AFD et BEA sont semblables (mêmes mesures d'angles)
Les longueurs de ces triangles sont proportionnelles :

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$$

Or DF = EB et notons AE = *x*
On obtient l'égalité suivante :

$$\frac{\mathrm{DF}}{x} = \frac{2x}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$$

Et donc : $2x^2 = \mathrm{DF}^2$ d'où $x = \mathrm{DF}/\sqrt{2}$

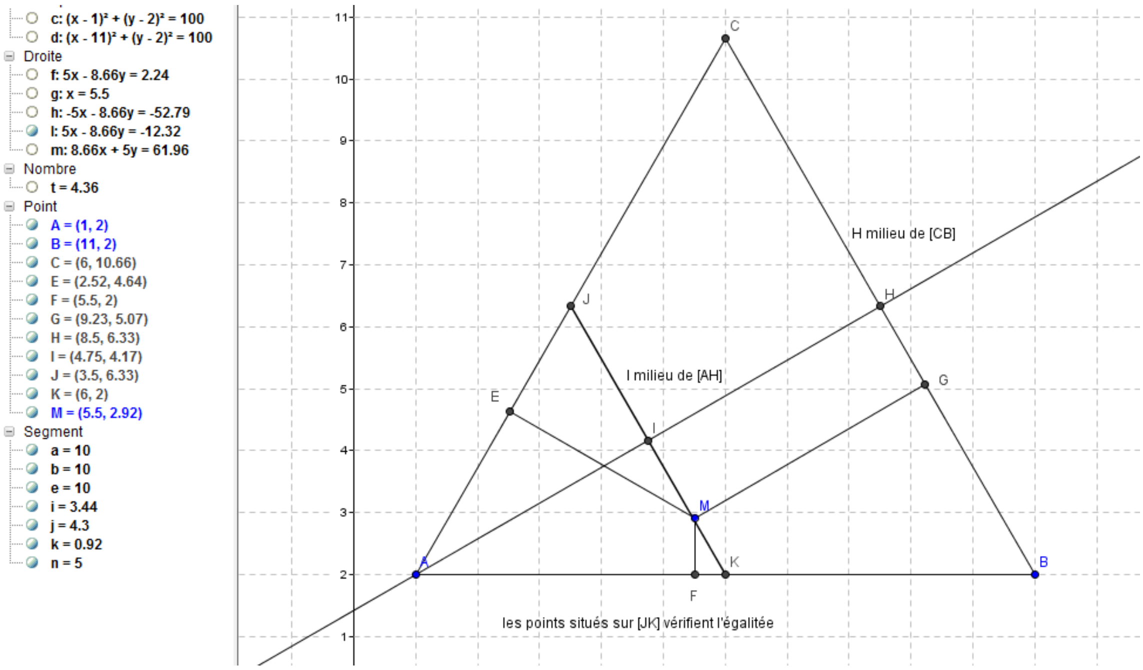
$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DF}}{\frac{\mathrm{DF}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \text{ d'où } \frac{AD}{AB} = \sqrt{2} \text{ et donc } \mathrm{AD} = 10\sqrt{2}$$

La longueur exacte de AD est $\mathbf{10\sqrt{2}}$

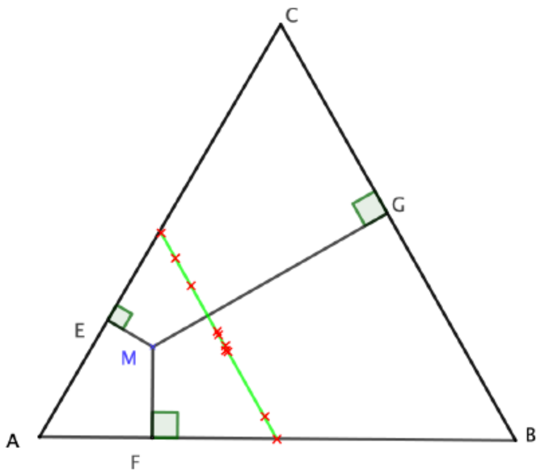
Figure en vraie grandeur en annexe.

Mathématiques SANS Frontières

Exercice 13 – *En fin* – 10 points - 2nde Pro



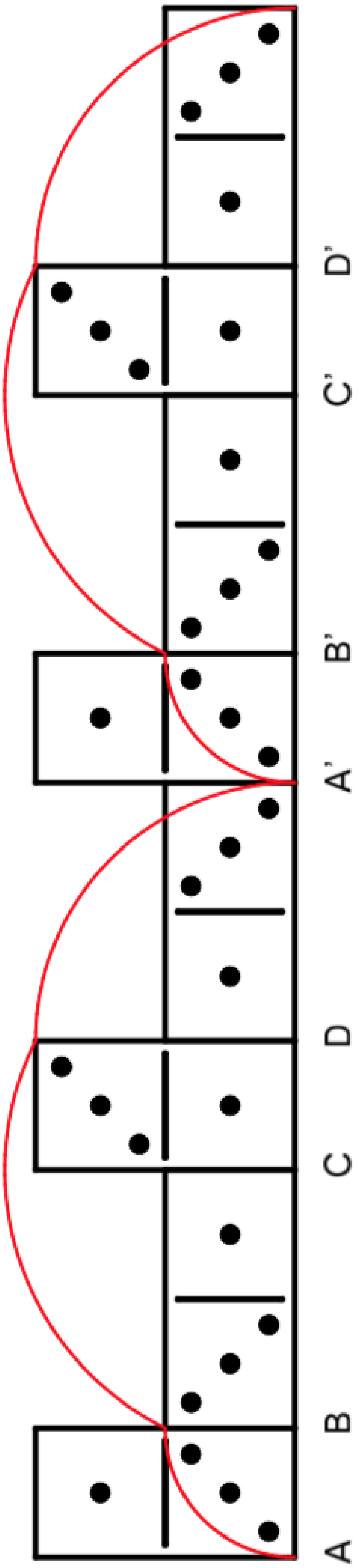
On peut dessiner un triangle équilatéral, placer un point M puis faire des hauteurs qui passent par M.
Dans Géogébra, il faut créer une variable t = i+k où i et k sont les étiquettes des segments [ME] et [MF].
Cela permet de trouver des points qui vérifient ME+MF=MG en déplaçant le point M et en regardant la valeur de t et de MG.
La solution est le segment [JK].



Mathématiques SANS Frontières

Annexe de l’exercice 5 « En domi-tours »

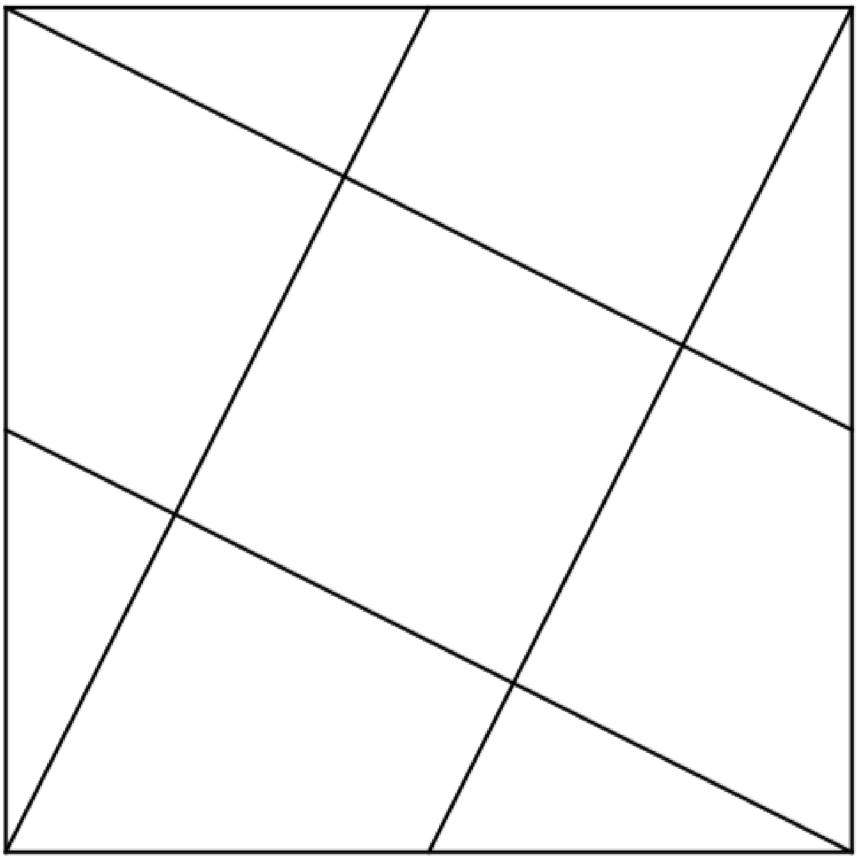
Taille réelle

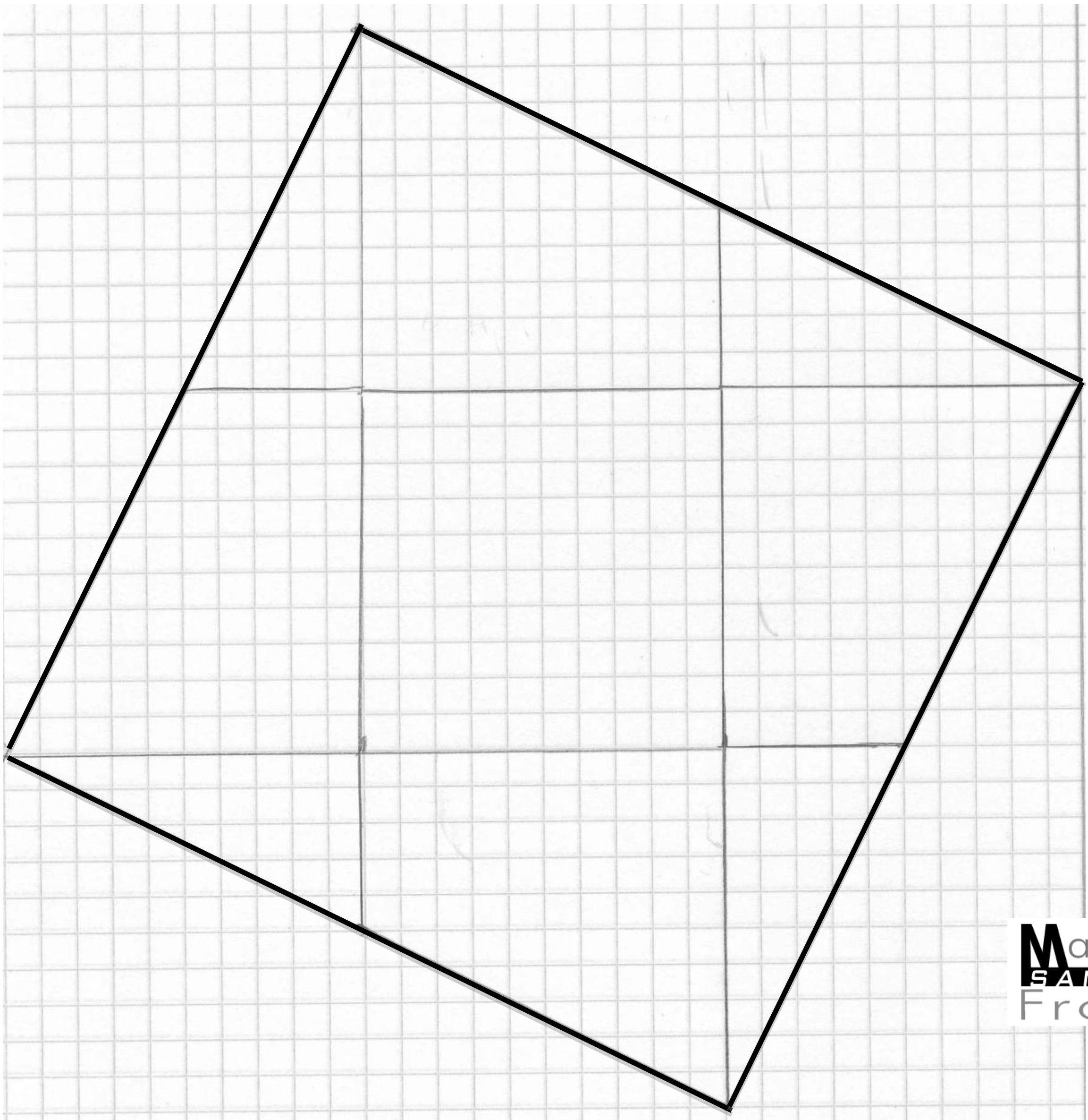


Mathématiques SANS Frontières

Annexe de l’exercice 6 « En déco »

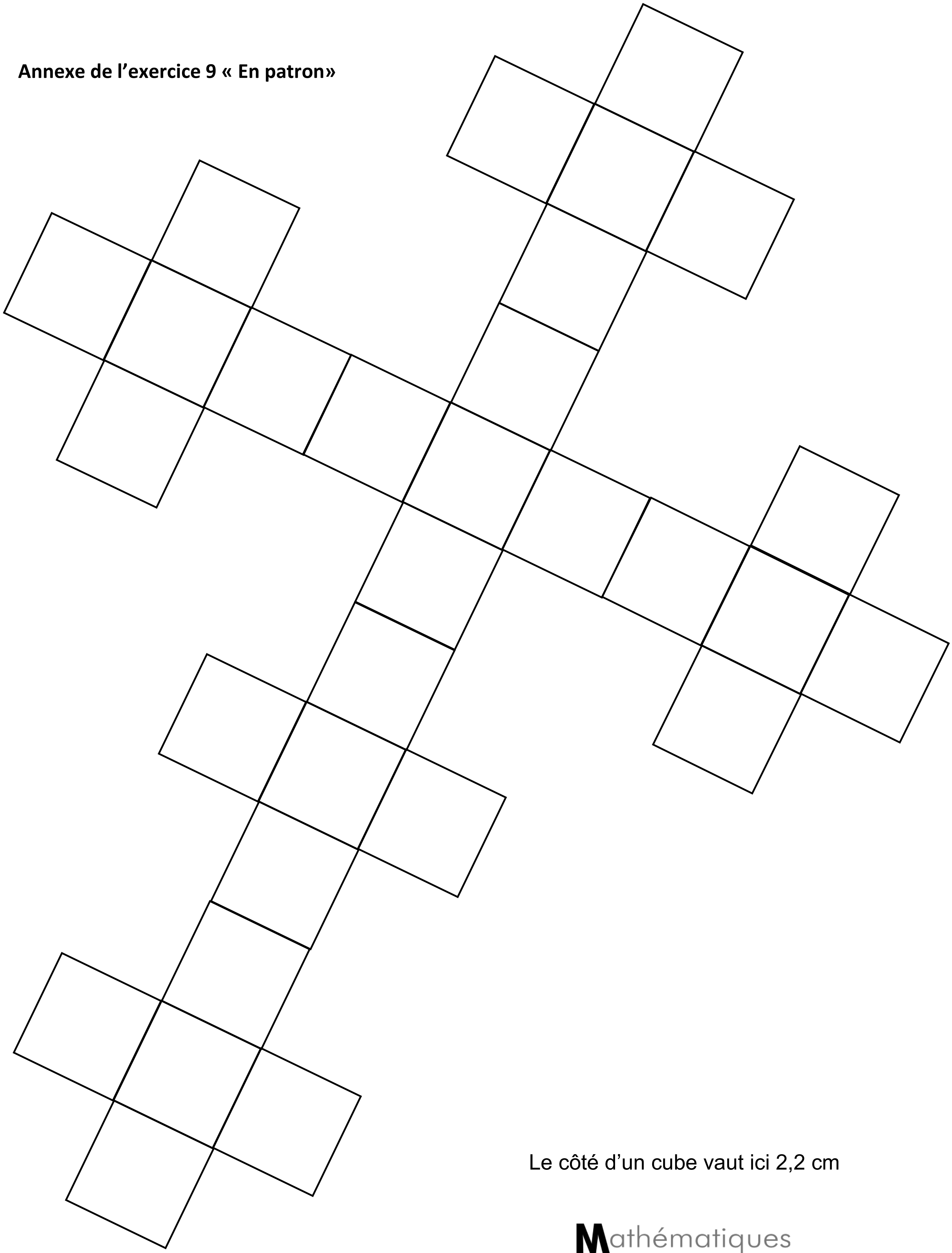
Échelle : 1/10 (côté du carré environ 11,2 cm)





Pour réaliser le carrelage, les élèves pourront s’aider de papier quadrillé.

Annexe de l'exercice 9 « En patron»

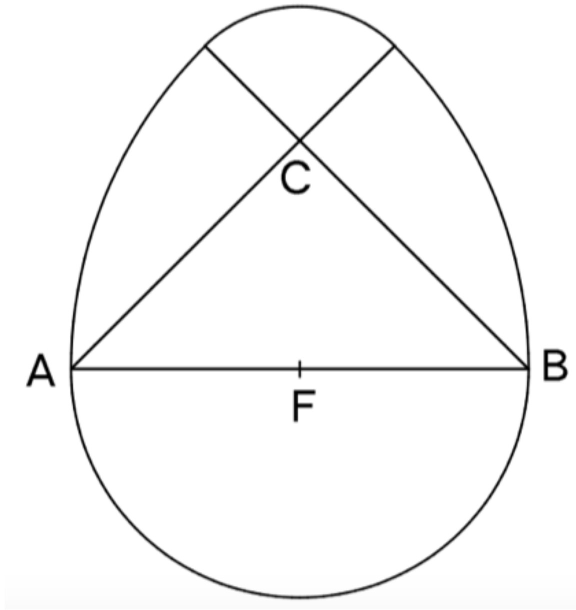


Le côté d'un cube vaut ici 2,2 cm

Mathématiques SANS Frontières

Annexe de l'exercice 10 « En œuf »

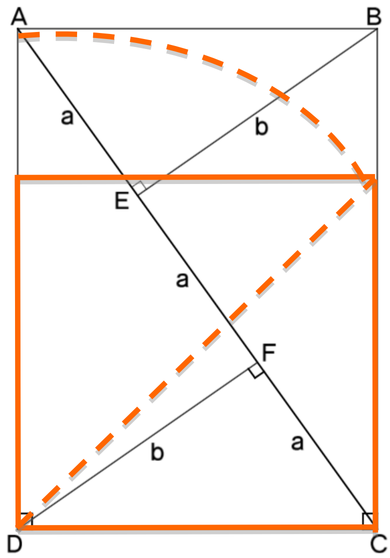
Taille réelle

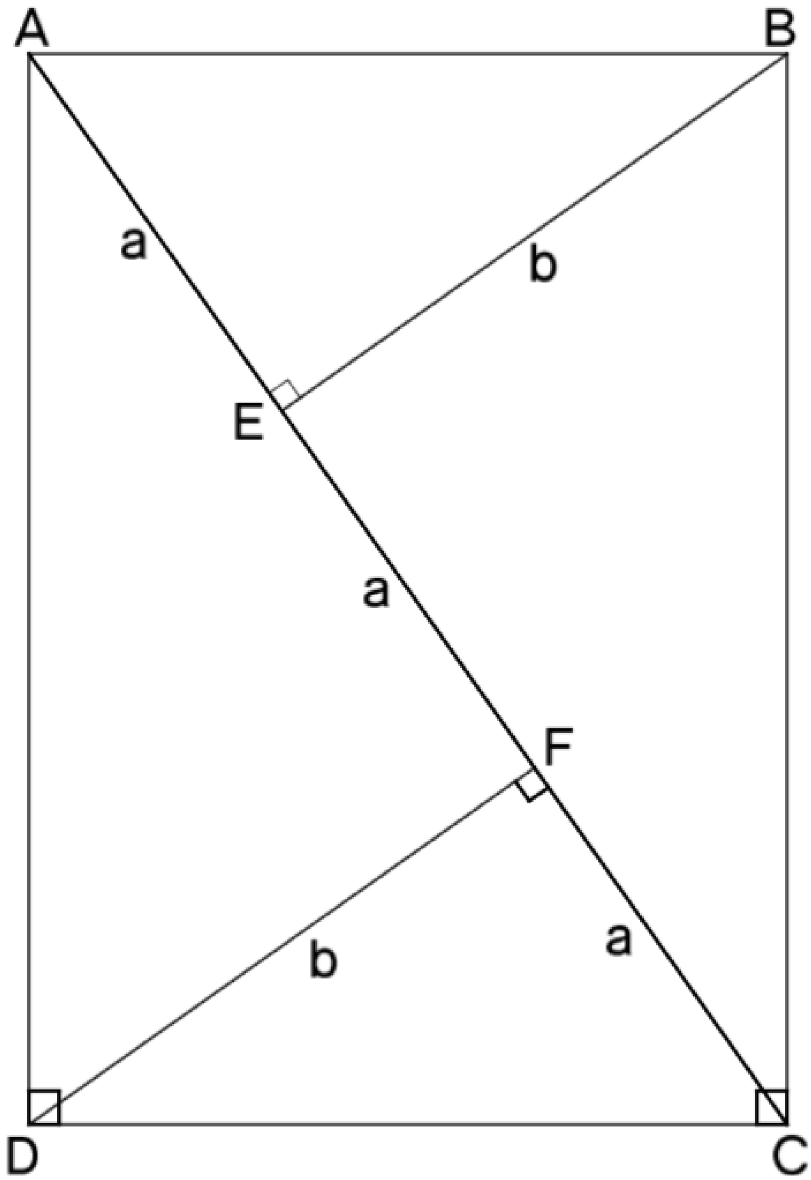


Annexe de l'exercice 13 GT « En rapport »

Taille réelle

<u>Indication :</u>
Tracer un carré de côté 10 cm, puis reporter la longueur de sa diagonale.
(comme sur le dessin ci-contre qui n'est pas en dimensions exactes)





Mathématiques SANS Frontières