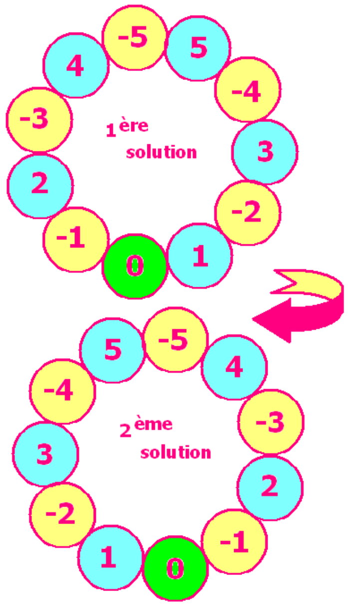
Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve de décembre 2009

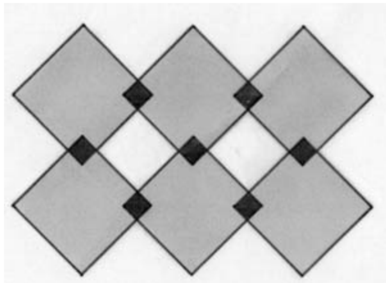


Exercice 1 : Aide-mémoire, 7 points

Irène n'a ni frère ni sœur, donc Jeanne, Gilles et Irène ont trois mères différentes.
Emile et Hector ont chacun une sœur. De ce fait, ils ont aussi la même mère que Jeanne.
Il reste alors François qui est nécessairement le frère de Gilles.
Ainsi, Béatrice qui a le plus d'enfants en a trois : Jeanne, Emile et Hector.

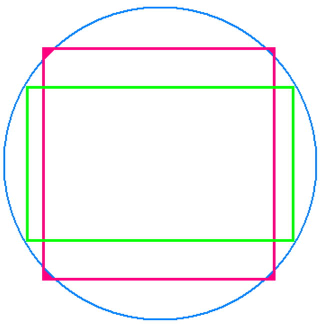
Exercice 2 : Calculs en boucle, 5 points

On remarque que 0 ne peut être inséré qu'entre –1 et 1. Ensuite tout le reste de la disposition s'en suit.
Il n'y a donc que 2 solutions (voir ci-contre).
S'agissant d'un collier, que l'on peut retourner, cette dualité peut être contestée : on peut aussi considérer que le collier peut être retourné (voir flèche), alors il n'y a plus qu'une seule solution.



Exercice 3 : Cabochons, 7 points

Soient a le côté des petits carrés noirs et x celui des grands carrés gris. Parmi les carrés gris, 4 sont amputés de 2 coins et 2 de 3 coins, d'où l'équation :
$6x^2 - 14a^2 = 40\times 7a^2$ et sa solution $x^2 = 49a^2$ donc $\boxed{x = 7a}$.



Exercice 4 : Et pourtant, il tourne ! 5 points

Un plat rectangulaire peut tourner dans le micro-ondes si et seulement si sa diagonale est inférieure à 35 cm.
Ainsi, un plat carré de côté 25 cm ne pourra pas tourner puisque $25\sqrt{2} \approx 35{,}35 > 35$ tandis qu'un plat rectangulaire de dimensions 30 cm × 18 cm y tournera puisque $\sqrt{30^2+18^2} = \sqrt{1224} \approx 34{,}98$.

Exercice 5 : Tri sélectif, 7 points

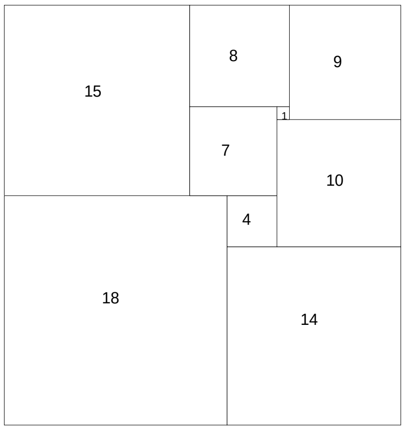
Pour isoler 1 fausse pièce parmi 9, Blaze fait trois paquets de 3 pièces puis compare les masses de deux d'entre eux à l'aide de sa balance. Si la balance reste en équilibre, la fausse pièce se trouve dans le troisième paquet, sinon elle se trouve dans le plus léger.
Ensuite, il compare les masses de deux pièces du paquet contenant la fausse pièce et l'identifie suivant le même raisonnement.
Pour isoler une fausse pièce parmi n, on pourra faire 3 paquets égaux si $n = 3p$.
Si $n = 3p+1$, on comparera 2 paquets de p pièces et il restera un paquet de $p+1$ pièces.
Si $n = 3p+2$, on comparera 2 paquets de $p+1$ pièces et il restera un paquet de p pièces.
Ainsi **7 pesées suffiront** pour isoler la fausse pièce parmi 2009, même si à chaque étape, elle se trouve dans le paquet le plus gros.

2009 = 670+670+669   670 = 223+223+224   224 = 75+75+74
75 = 25+25+25   25 = 8+8+9   9 = 3+3+3   3 = 1+1+1

Exercice 6 : Pour les huiles, 5 points

8	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3	0	3	0	3	1	1	0	3	0

Exercice 7 : Patchwork, 7 points



L'aire du rectangle est égale à la somme des aires des carrés qui le constituent, à savoir :
$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2$, ce qui est égal à 1056.
Longueur et largeur du rectangle doivent être supérieures à 18 (côté du carré le plus grand) et leur produit doit être égale à 1056 : **la seule solution est un rectangle de 32 × 33**. A partir de là, des essais respectant cette contrainte aboutissent au résultat *(par exemple : il se trouve que 18+14 = 32 et 18+15 = 33 d'où l'idée …).*

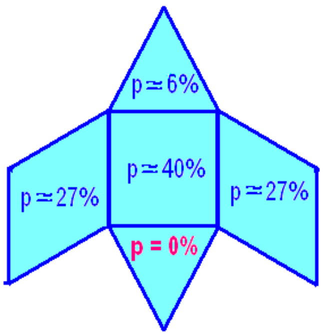
Exercice 8 : Schmutzele, 5 points

Soit a le nombre d'auvergnats, b celui des bretons et c celui des catalans.

Mise en équations (avec a, b et c : entiers entre 1 et 5) : $\begin{cases} a+b+c=10 \\ 2ab+3bc+2ca=75 \end{cases}$

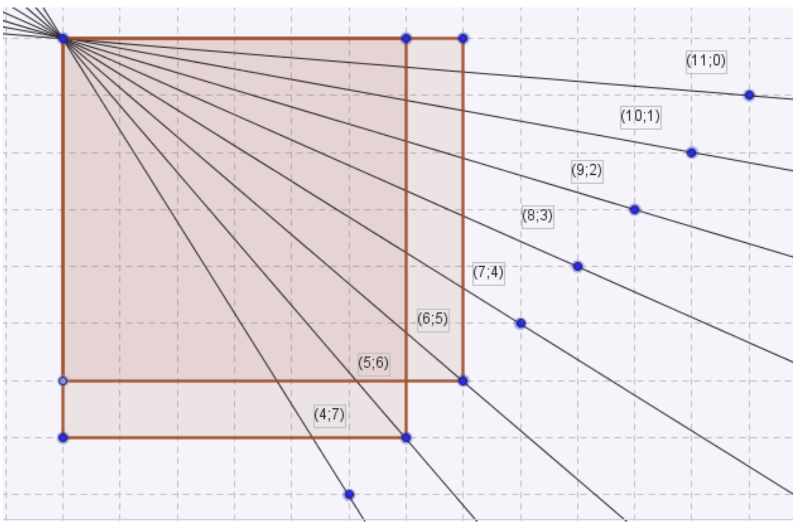
En utilisant la première équation, la deuxième peut s'écrire : $bc = 25 - 2a(10 - a)/3$.
Les valeurs 2 et 5 ne sont pas possibles pour a car alors, $2a(10 - a)$ n'est pas divisible par 3.
Avec $a = 1$, on obtient $bc = 19$: cela ne convient pas car 19 n'est pas le produit de deux entiers compris entre 1 et 5.
Avec $a = 3$, on obtient $bc = 11$: cela ne convient pas car 11 n'est pas le produit de deux entiers compris entre 1 et 5.
Il reste donc $a = 4$; on obtient alors $bc = 9$ ce qui impose $b = c = 3$ et respecte bien la condition $a + b + c = 10$. **L'unique solution est donc : a = 4, b = 3 et c = 3.**

Exercice 9 : Pentadé, 7 points



Voici le patron du pentadé.
Sur chaque face est inscrite une valeur approchée de la **probabilité** d'avoir cette face en dessous à l'issue d'un lancer*.
Sur 100 lancers, les fréquences observées peuvent être **sensiblement différentes de ces valeurs**, mais, si le pentadé est bien confectionné, il ne restera **jamais en équilibre sur la face triangulaire de probabilité nulle**, puisque la projection verticale du centre de gravité du pentadé est à l'extérieur de cette base.
*(*Nous ne connaissons pas les valeurs précises de ces probabilités.)*

Exercice 10 : En diagonale, 10 points



Le nombre de carreaux de la pièce est égal au nombre de carreaux contenus dans le rectangle délimité par les deux nœuds, multiplié par 9.
Entre 2 nœuds la diagonale coupe 12 carreaux. Appelons a et b les nombres respectifs d'intersections de la diagonale avec les côtés verticaux et horizontaux des carreaux.

1. $a + b = 11$.
2. Quel que soit le couple (a ; b), il n'existe pas de nœud intermédiaire dans le rectangle.
3. Le nombre de carreaux contenus dans le rectangle est égal à : $(a + 1)(b + 1)$.
4. Les 2 couples (6 ; 5) et (5 ; 6) engendrent le nombre maximum : **378 carreaux**.

Exercices « Spécial Secondes »

Exercice 11 : Chaud-Froid, 5 points

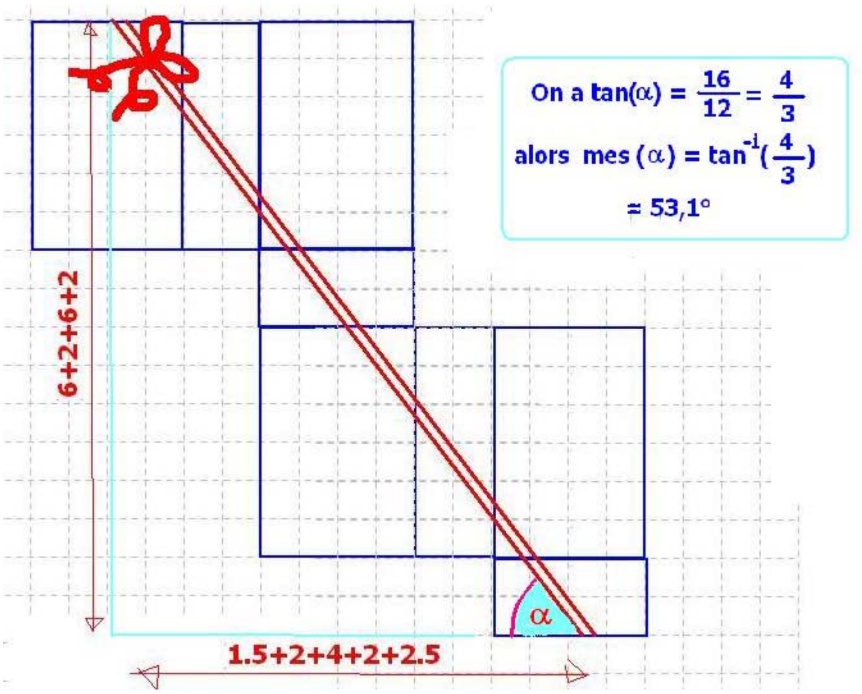
Soit t la durée (en heures) de la coupure de courant. La température du congélateur a augmenté de 0,5°C par heure pendant *t* heures puis diminué de 2°C pendant 1h15, c'est-à-dire 1,25h. On obtient donc l'équation : $-18+0,5t-2\times 1,25=-17$.

On trouve $0,5t=3,5$ puis $t=7$. **La panne a donc duré 7h.**

On peut aussi partir de la situation finale pour en déduire qu'au rétablissement du courant la température était de $-17+2\times 1,25=-14,5$ °C, et donc que le congélateur avait gagné $7\times 0,5=3,5$ °C pendant la coupure.

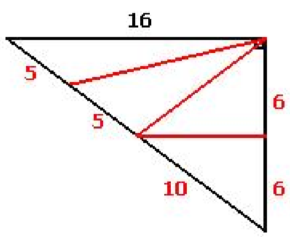
Exercice 12 :Pakékado, 7 points

L'angle α étant conservé à chaque passage d'arête, le développement plan du parcours du ruban est un segment de droite. On peut alors déterminer la mesure de l'angle par la trigonométrie.

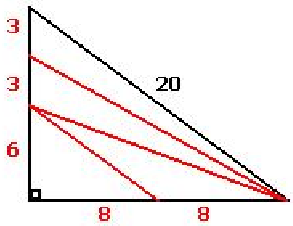


Exercice 13 : Zorro y est arrivé! ,10 points

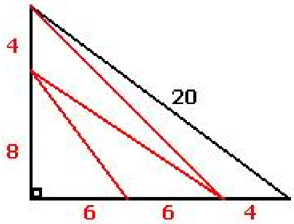
Il y a en tout, 12 façons de partager ce triangle à la manière de Zorro.
En voici trois:



Ici, on a partagé le triangle en deux moitiés par sa médiane issue de l'angle droit, puis on a recoupé chaque moitié en deux quarts par leurs médianes.



Ici, une variante de cette idée, mais la première médiane tracée est issue d'un angle aigu.



Là, une autre idée : partant d'un sommet, on a joint le quart de la base puis le tiers de la base du triangle restant, pour finir par une médiane.