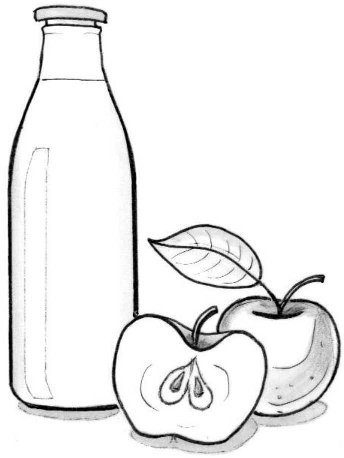
L'épreuve définitive 2025 et ses compléments

Exercice 1 LV– *Pom'Eau*– **7 points –**
Thème : Nombres et calculs Fraction et partage de volume. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Fraction – Pourcentage -

Richard vient de faire du jus de pommes.
Les enfants préfèrent le boire dilué avec de l'eau.
Richard prélève 25 cL de jus de pommes d'une bouteille de 100 cL, puis il complète avec de l'eau.
Il prélève ensuite 1/5 de ce mélange et le remplace par de l'eau.



Quel est le pourcentage de jus de pommes dans le mélange ainsi obtenu ? Expliquer votre raisonnement.

Compétences : Représenter Modéliser Calculer Communiquer
Capacités : Produire et utiliser plusieurs représentations d'un nombre, traduire en langage mathématique une situation réelle, modéliser une situation à l'aide d'un schéma.
Tâches de l'élève : Calculer la fraction d'une grandeur, additionner et soustraire des fractions, schématiser un problème, expliquer sa démarche.
Barème proposé : 3 pts pour la langue 4 pts pour le raisonnement (réponse sèche 1 pt sur les 4)

Richard prélève 25 cL de jus de pommes et rajoute de l'eau.
Dans la bouteille, il y a alors 75 cL de jus de pommes et 25 cL d'eau.
Il prélève 1/5 du mélange soit 15 cL de jus de pommes et 5 cL d'eau.
Finalement, il reste 60 cL de jus de pommes et 20 cL d'eau. Il rajoute 20 cL d'eau.
À la fin, il y a 60 cL de jus de pomme et 40 cL d'eau.
Il y a 60 % de jus de pommes dans le mélange obtenu.

Dans les autres langues :

Richard hat Apfelsaft gemacht. Seine Enkelkinder trinken ihn gerne als Schorle, mit Mineralwasser gemischt.
Richard nimmt eine Flasche mit 100 cl Apfelsaft, gießt 25 cl aus und füllt die Flasche wieder mit Mineralwasser auf.
Danach gießt er 1/5 dieses Gemischs aus und ersetzt es durch Mineralwasser.

Wieviel Prozent Apfelsaft enthält die so entstandene Schorle? Erklärt eure Antwort.

Richard has just made apple juice.
Children prefer to drink it diluted with water.
Richard takes 25cl of apple juice from a 100cl bottle, then he tops up the bottle with water.
He then takes 1/5 of this mixture and replaces it with water.

What is the percentage of apple juice in the resulting mixture?
Explain your reasoning.

Richard ha preparato del succo di mele.
I bambini preferiscono berlo diluito in acqua.
Richard, perciò, preleva 25 cl di succo di mela da una bottiglia da 100 cl e, quindi, la riempie aggiungendo dell’acqua.
In seguito, preleva 1/5 di questa miscela e la sostituisce nella bottiglia con dell’acqua.

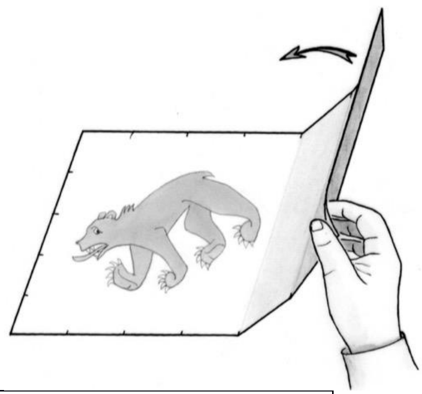
Qual è la percentuale di succo di mela nella miscela così ottenuta?
Illustrate il vostro ragionamento.

Richard acaba de hacer zumo de manzana. Los niños prefieren beberlo diluido con agua. Richard extrae 25 cl de zumo de manzana de una botella de 100 cl, luego la completa con agua. Después extrae 1/5 de esta mezcla y la sustituye por agua.

¿Cuál es el porcentaje de zumo de manzana de la mezcla así obtenida?
Justifica tu respuesta.

Exercice 2 – *Multi-plis* – 5 points –
Thème : Grandeurs et mesures – Nombres et calculs **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Rectangle, périmètre, calcul littéral, équation.

Le périmètre d'une feuille de papier rectangulaire est de 69,6 cm.
Maxime plie cette feuille en sept parties égales dans le sens de la longueur.
Il obtient une bande rectangulaire qu'il plie en cinq parties égales dans le sens de la largeur initiale de la feuille. Il obtient un carré.



Calculer les dimensions de cette feuille.
Expliquer votre démarche.

Compétences : Modéliser Représenter Calculer
Capacités : Mettre un problème en équation, calculer en utilisant le langage algébrique, résoudre algébriquement une équation, mobiliser les propriétés d'une figure pour calculer des grandeurs géométriques.
Tâches de l'élève : Modéliser un problème à l'aide d'une équation, résoudre une équation.
Barème proposé : 2 pts pour l'expression littérale du périmètre. 1 pt pour la longueur du côté du carré. 2 pts les dimensions de la feuille. Toute autre méthode est aussi acceptée.

Soit c la longueur du côté du carré obtenu.
La feuille de papier d'origine a pour dimensions $7c$ et $5c$.
Le périmètre de la feuille en fonction de c est : $2(7c + 5c) = 24c = 69,6$.
On obtient $c = 69,6 : 24 = 2,9$ cm.
La longueur de la feuille : $2,9 \times 7 = 20,3$ cm
La largeur de la feuille : $2,9 \times 5 = 14,5$ cm

Les dimensions de la feuille sont : 20,3 cm pour la longueur et 14,5 cm pour la largeur.

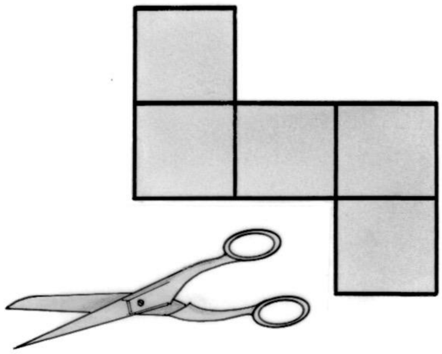
Exercice 3 – *C'est carré* – 7 points –

Thème : Géométrie – Configuration du plan
Principaux éléments mathématiques travaillés : Carré, perpendiculaires, triplets pythagoriciens, aire, racines carrées.

Proposer deux découpages de cette figure de façon à constituer un carré de trois pièces :

- ***l'un obtenu en deux coups de ciseaux perpendiculaires ;***
- ***l'autre obtenu en deux coups de ciseaux parallèles.***

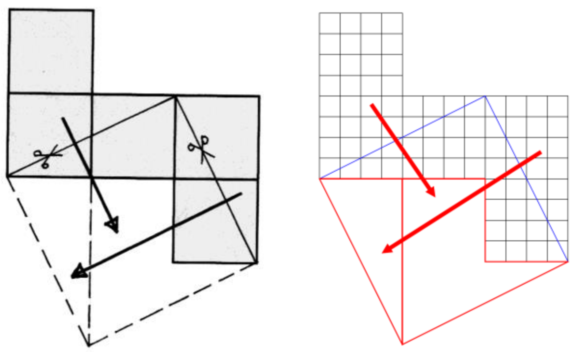
Coller les deux assemblages sur la feuille-réponse.



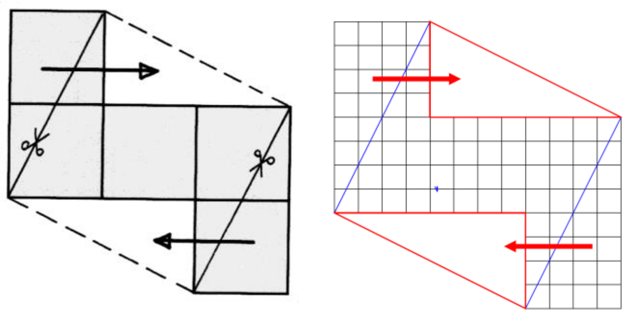
Compétences : Chercher Calculer
Capacités : Mobiliser des propriétés géométriques, tester, extraire des sous-figures.
Tâches de l'élève : Puzzle, découpage, respect d'une contrainte, règle.
Barème proposé : 4 pts pour un premier découpage 3 pts pour un deuxième découpage (2 pts pour des traces de recherches cohérentes même non abouties : Par exemple 1 pt pour $\sqrt{5}$)

Soit x le côté des « petits » carrés. L'aire de la figure est $5\,x^2$.
Le carré qu'on cherche à obtenir aura donc un côté de $x\sqrt{5}$ ce qui est la longueur d'une diagonale d'un rectangle constitué de deux petits carrés adjacents.
Ceci oriente clairement vers deux solutions qui ne sont pas uniques :

Deux coups de ciseaux perpendiculaires :



Deux coups de ciseaux parallèles :



Exercice 4 – *À* Termes – 5 points –
Thème : Nombres et calculs **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Proportionnalité, calcul littéral, équation.

Au Moyen-Âge, le château de Termes connaît une vie paisible. Des soldats ennemis l'ont assiégé empêchant à présent tout approvisionnement. Il ne reste plus que 60 jours de vivres pour les personnes prises au piège dans le château. Par un souterrain, un groupe de 30 villageois vient se réfugier dans le château. De ce fait, les vivres dans le château assiégé ne suffiront plus que pour 50 jours.

Déterminer le nombre de personnes dans le château de Termes avant l'arrivée des villageois. Expliquer votre démarche.

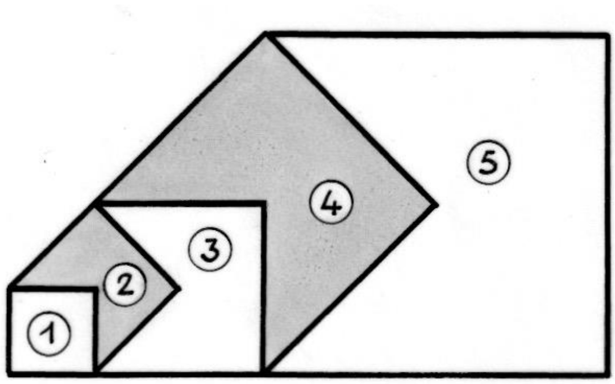
Compétences : Modéliser Représenter Calculer Communiquer
Capacités : Traduire en langage mathématique une situation réelle, calculer en utilisant le langage algébrique mettre un problème en équation, résoudre algébriquement une équation, résoudre des problèmes de proportionnalité.
Tâches de l'élève : Modéliser un problème à l'aide d'une équation, résoudre une équation, tâtonnement, expliquer sa démarche
Barème proposé : 1 pt pour la réponse 4 pts pour un raisonnement cohérent

On suppose qu'il y a P personnes dans le château avant l'arrivée des villageois.
Le château dispose de $(60 \times P)$ rations.
Et après l'arrivée des 30 villageois, il y a $(P + 30)$ personnes dans le château,
soit $50 \times (P + 30)$ rations.
Comme la quantité de vivres ne change pas, on obtient l'équation :
$60\ P = 50\ (P + 30)$ et donc $P = 150$.

Il y avait 150 habitants dans le château avant l'arrivée des villageois.

Exercice 5 – *Réitère* – 7 points –
Thème : Grandeurs et mesures - Pattern **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Aire, Pythagore, carré, diagonale, pattern.

Pour construire la figure ci-contre, on commence par tracer le carré ① de côté 1.
Puis on construit le carré ②de côté la diagonale du carré①.
Puis on construit le carré ③de côté la diagonale du carré②.
Puis on construit un carré ④de côté la diagonale du carré③.
Etc.



Déterminer la longueur du côté du carré ⑨ ainsi que l'aire totale de la figure obtenue après construction du carré ⑨.

Compétences : Calculer Représenter Raisonner
Capacités : Utiliser des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, calculer l'aire d'un carré, calculer avec des nombres de manière exacte, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique).
Tâches de l'élève : Calcul.
Barème proposé : 3 pts pour la longueur du côté du carré ⑨ 4 pts pour l'aire de la figure

Le carré ① de côté 1 a une aire de 1.
Le côté du carré ② est la diagonale du carré ①, soit $\sqrt{2}$, et son aire est de 2.
Le côté du carré ③ est la diagonale du carré ②, soit 2, et son aire est de 4.
Et chaque carré a ainsi une aire double du précédent.

Carré	Côté	Aire	Aire totale
①	1	1	1
②	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$	2	2,5
③	$\sqrt{4} = 2$	4	5,5
④	$\sqrt{8} \approx 2{,}828$	8	11,5
⑤	$\sqrt{16} = 4$	16	23,5
⑥	$\sqrt{32} \approx 5{,}657$	32	47,5
⑦	$\sqrt{64} = 8$	64	95,5
⑧	$\sqrt{128} \approx 11{,}314$	128	191,5
⑨	$\sqrt{256} = 16$	256	383,5

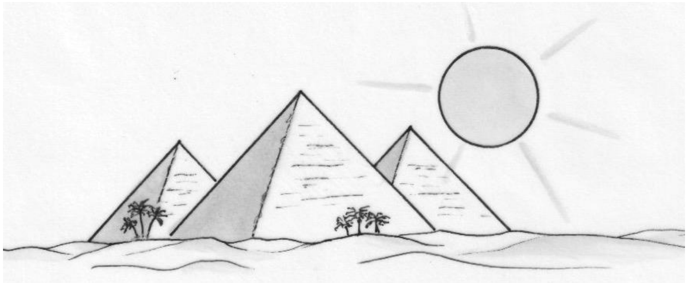
Les côtés suivent, eux, la progression suivante :
le carré ① a un côté $\sqrt{1}$ =1, le carré ② a un côté $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, le carré ③ a un côté $\sqrt{4}$ =2, etc.
Pour les aires totales, avec un seul carré, l'aire est de 1, puis chaque fois, on ajoute à cette aire déjà présente les trois quarts de celle du carré qu'on vient de dessiner, et la progression est la suivante :

$1 \;;\; 1 + \frac{3}{4} \times 2 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5 \;;\; 2{,}5 + \frac{3}{4} \times 4 = 2{,}5 + 3 = 5{,}5$ etc.

On peut ainsi résumer toutes ces valeurs dans un tableau comme celui ci-dessus.

La longueur du côté du carré ⑨ vaut $\sqrt{256}$. L'aire totale de la figure obtenue après construction du carré ⑨ vaut 383,5.

Exercice 6 – $\pi\ ramide$ – **5 points -**
Thème : Grandeurs et mesures – Nombres et calculs **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Aire, disque, fraction, puissance.



Aujourd'hui, pour calculer l'aire d'un disque nous utilisons le nombre π dont une valeur approchée est 3,1415926.

Au temps de la construction des pyramides, les Égyptiens utilisaient une autre méthode pour calculer l'aire d'un disque :

- Enlever 1/9 du diamètre du disque au diamètre.
- Élever le résultat au carré.

Ce calcul donnait une valeur proche de l'aire du disque.

Dans la formule utilisée par les Égyptiens, le nombre π n'apparaît pas.
Quelle valeur approximative de π les Égyptiens utilisaient-ils ? Expliquer votre raisonnement.

Compétences : Calculer Représenter
Capacités : Produire et utiliser plusieurs représentations d'un nombre, choisir un cadre adapté (numérique ou géométrique) pour traiter un problème, calculer en utilisant le langage algébrique, comparer une situation à un modèle connu, calculer avec des nombres de manière exacte.
Tâches de l'élève : Calculer, comparer.
Barème proposé : 2 pts pour l'écriture de l'aire d'après les Égyptiens 3 pts pour le raisonnement et la réponse avec au minimum deux décimales.

Soit d le diamètre du disque et r son rayon.
Selon les Égyptiens du temps des pyramides, l'aire du disque est égale à :

$$\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(2\,r)^2 = \frac{256}{81}r^2$$

Or l'aire du disque de rayon r est exactement égale à : $\pi \times r^2$
D'où :

$$\frac{256}{81}r^2 \approx \pi\, r^2$$

Le rayon n'étant pas nul, en simplifiant membre à membre par r^2 on obtient :

$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3{,}16$$

La valeur approximative de π utilisée par les Égyptiens était :

$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3{,}16$$

Complément : Petite histoire de Pi

π : quelle histoire !
Cela commence par le **règne de la géométrie**.
Les Babyloniens, vers 2000 avant Jésus-Christ, lui attribuent la valeur 3 + 1/8 soit 3,125 comme l'attestent des calculs retrouvés sur des tablettes d'argile.

Pour les Egyptiens, la valeur de π est inscrite sur le célèbre papyrus Rhind : c'est la diminution du 1/9e du diamètre dont il est question dans notre exercice : sa valeur approchée est alors de 3,16 la valeur arrondie de $(16/9)^2$

Au IIIe siècle avant J.-C., en Grèce, Archimède établit une méthode mathématique pour la cerner au plus près : il encadre un cercle par des polygones et donne un encadrement de π compris entre 3,1408 et 3,1428

En Chine, vers 120 après J.-C. on attribuait à π la valeur 142/45 soit environ 3,1555

En Inde, vers 500 après J.-C., Aryabhatta donnait la valeur 62832 / 20000 soit 3,1416 à l'aide de polygones à grand nombre de côtés.

Vers 830, chez les Arabes, Al Kharizmi mentionne la fraction bien connue : 22/7
dont une valeur arrondie est 3,1428

Plus tard, au XVIIe et au XVIIIe siècle, avec Wallis, Newton, Leibniz, Euler,…ce sera la période féconde de l'**analyse** avec des formules pouvant donner plus de 500 décimales exactes !

Enfin, au XVIIIe siècle puis au XIXe siècle c'est la période où l'on réalise la différence entre les nombres rationnels, les nombres algébriques et les **nombres transcendants** : et la conclusion est que π est un nombre transcendant !

Aujourd'hui on connait plus de 31 000 milliards de décimales de π…mais les ingénieurs se contentent souvent de 4 décimales et les ordinateurs travaillent avec 16 décimales de π.
Cela n'a pas encore été démontré, mais π pourrait bien être un « nombre univers », c'est à dire qu'il contiendrait toutes les séquences de chiffres possibles ! Par exemple la date de la chute du mur de Berlin, soit le 09111989, ou même la date de votre anniversaire !

Exercice 7 – *1 devant 1 derrière* – 7 points –

Thème : Nombres et calculs
Principaux éléments mathématiques travaillés : Multiplications, arithmétique, calcul.

Monsieur Reich veut acheter un appartement. Il a trouvé celui qui lui plait à un prix qui s'écrit avec un nombre de 6 chiffres dont le premier chiffre est 1.
Oh stupeur ! Au moment de signer, l'agent immobilier a fait une erreur sur les documents, et le chiffre 1 est passé à la fin du nombre. Le montant est alors trois fois plus élevé que le prix réel. Monsieur Reich refuse de signer.

Trouver le prix réel de l'appartement de Monsieur Reich.
Expliquer votre raisonnement.

Compétences : Chercher Représenter Raisonner
Capacités : Résoudre algébriquement une équation, mettre un problème en équation, tester.
Tâches de l'élève : Disjonction des cas, essai-erreur, tâtonnement, modéliser.
Barème proposé : 1 pt pour chaque chiffre 1 pt pour les explications 1 pt pour le prix de l'appartement

On effectue pas à pas l'opération et tenant compte des retenues.
$3 \times e$ doit être un nombre se terminant par 1 (e est compris entre 0 et 9) :
$e = 7$ avec un report de 2.
On a alors $3d + 2$ égal à un nombre se terminant par 7.
On en déduit $d = 5$ et la retenue est 1.
La seule solution pour c est $c = 8$ et la retenue est 2
On procède de même pour la suite
Le prix de l'appartement est 142 857.
Si le 1 passe à la fin on obtient 428 571 qui est bien le triple du nombre précédent.

Le prix réel de l'appartement de Monsieur Reich est 142 857 €.

<u>Autres méthodes astucieuses :</u>

Méthode 1 :
Par décomposition décimale :

L'énoncé peut se traduire par l'égalité : abcde1 = 3 x 1abcde
Une décomposition en base 10 donne :

$$100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100d + 10e + 1$$
$$= 300\,000 + 30\,000a + 3000b + 300c + 30d + 3e$$

Par soustraction on obtient :

$$70\,000a + 7000b + 700c + 70d + 7e = 299\,999$$

ou : $7 \times (\text{abcde}) = 299\,999$

ou : $\text{abcde} = 42\,857$

D'où le prix réel de l'appartement : **142857 €**

Méthode 2 :
Par mise en équation :

Le prix réel est 1***** , où ***** est un nombre à 5 chiffres que j'appelle n.

J'ai donc 1***** = 100000 + n.

Suite à l'erreur d'écriture, le prix affiché est *****1, c'est-à-dire 10n + 1.

On note abcde le nombre n, on a alors :

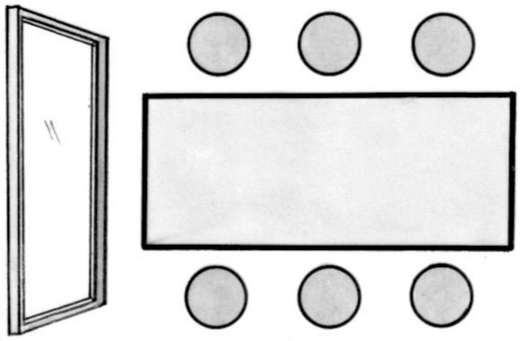
n = abcde
10 n = abcde0
10 n + 1 = abcde1
100 000 + n = 1abcde

On sait que ce nouveau prix est 3 fois plus élevé que l'ancien.
On résout donc : 10n + 1 = 3(100000 + n) (OU abcde1 = 3 x 1abcde)

D'où l'équation : 10 n + 1 = 30 000 + 3n
On obtient : 7n = 299 999 d'où n = 42 857
D'où le prix réel de l'appartement : **142857 €**

Exercice 8 – *Plan de table* – 5 points -
Thème : Organisation et gestion de données – Stratégie **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Organisation de données, logique, stratégie.

Trois couples dînent autour d'une même table :
M. et Mme Hans ; M. et Mme Klein ; M. et Mme Muller.
Aucun homme ne s'est assis à côté d'un autre homme.
Aucun homme n'est assis à côté ou en face de son épouse.
M. Hans n'est ni à côté ni en face de Mme Klein.
Mme Klein discute avec Mme Muller, à côté de laquelle elle est assise
M. Muller n'aime pas les courants d'air et n'est pas à côté de la fenêtre.



Placer les six convives en respectant ces contraintes.

Compétences : Chercher Raisonner
Capacités : Extraire et organiser d'un document les informations utiles, tester, utiliser un raisonnement logique.
Tâches de l'élève : Essai-erreur, tâtonnement, respect d'une contrainte, règle.
Barème proposé : 5 pts pour une des deux solutions (justification non demandée)

Deux solutions :

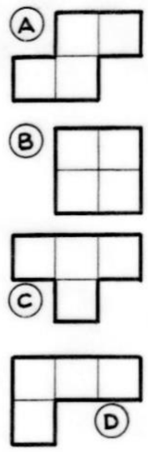
M. Klein	Mme Hans	M. Muller
M. Hans	Mme Muller	Mme Klein

M. Hans	Mme Muller	Mme Klein
M. Klein	Mme Hans	M. Muller

Exercice 9 – *Tétraminos* – 7 points
Thème : Nombres et calculs **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Addition, équations, critères de divisibilités, arithmétique, logique.

On dispose de quatre tétraminos notés A B C D
On place un de ces quatre tétraminos sans changer son orientation initiale dans la grille dessinée ci-contre pour qu'il recouvre exactement quatre entiers. On calcule alors la somme des quatre entiers qu'il recouvre.
<u>Exemple</u> : Le tétramino **A** déjà placé recouvre les entiers 13 14, 22 et 23.
13 + 14 + 22 + 23 = 72. La somme de ces quatre entiers est 72.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



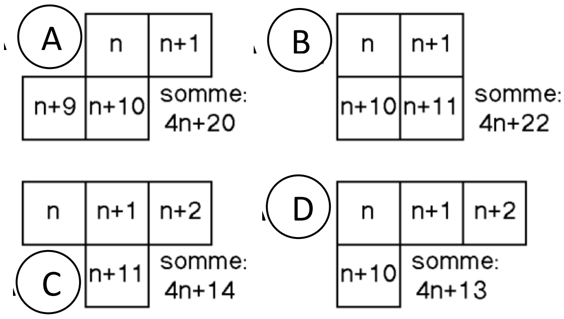
Quels sont les quatre nombres recouverts par le tétramino C si la somme est 318 ?
Lequel de ces quatre tétraminos faut-il placer dans la grille pour obtenir une somme de 121 ? Quels sont les quatre nombres recouverts ?

Un seul de ces tétraminos placé sur la grille donne toujours une somme impaire. Lequel ? Démontrer pourquoi.

Compétences : Chercher, calculer, raisonner.
Capacités : Calculer en utilisant le langage algébrique, mettre un problème en équation, résoudre algébriquement une équation, démontrer, tester.
Tâches de l'élève : Calcul, tâtonnement, disjonction des cas, méthode de fausse position.
Barème proposé : 2 pts pour les nombres recouverts par C 1 pt pour D recouvre 121 2 pts pour les nombres recouverts par D 2 pts pour celui qui donne une somme impaire

On calcule la somme des quatre nombres recouverts par le tétramino en nommant n l'un de ces nombres dans l'une des cases du tétramino.

Par exemple :



Le tétramino A recouvre toujours des nombres dont la somme est multiple de 4, puisque 20 est multiple de 4.
Les tétraminos B et C recouvrent toujours des nombres dont la somme est paire.
Et le tétramino D recouvre toujours des nombres dont la somme est impaire.

- Si la somme est 318 pour le tétramino C, on calcule :
  (318 – 14) : 4 = 76 et on trouve les quatre nombres recouverts : 76 ; 77 ; 78 et 87.
- C'est donc le tétramino D qui recouvre des nombres dont la somme est 121.
  4n + 13 =121   4n = 108   ainsi n = 27
  Les quatre nombres sont : 27 ; 28 ; 29 ; 37 et 27 + 28 + 29 + 37 = 121

Si la somme est 318, les quatre nombres recouverts par le tétramino C sont :
76 ; 77 ; 78 et 87.
Pour obtenir une somme de 121, le tétramino D recouvre les nombres 27 ; 28 ; 29 et 37.

<u>Autre méthode de résolution pour les premières questions :</u>

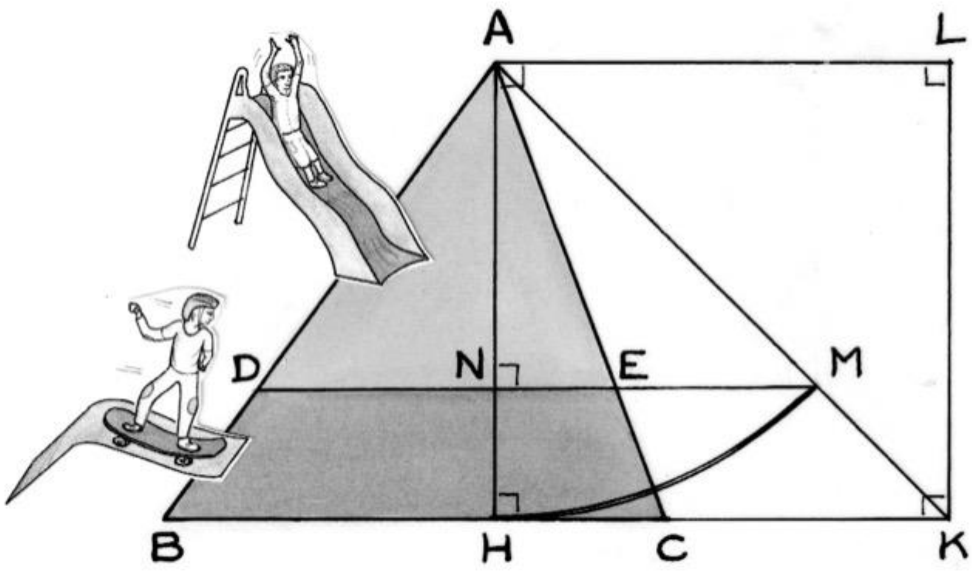
« Fausse position » par fausse moyenne des nombres

Il y a bien longtemps, pour résoudre des problèmes, on pratiquait la méthode de la « fausse position » ou « régula falsi » : sans passer par une mise en équation, il s'agissait de faire des essais, on disait « imaginer le faux », pour ensuite corriger le tir et trouver la bonne solution.

Les quatre nombres recouverts par le tétramino C font un total de 318. On peut donc imaginer que l'un d'entre eux fasse environ le quart de 318 soit 79.
Selon la forme du tétramino C on aura les quatre nombres suivants 79 ; 77 ; 78 ; 87.
La somme de ces 4 nombres fait 330 soit 12 de trop. En retirant 3 à chaque nombre, la réponse apparait tout simplement : **76 ; 77 ; 78 ; 87 dont le total fait bien 318.**

Nous avons vu qu'un seul des 4 tétraminos avait un total impair : c'est le D.
Les quatre nombres recouverts par le tétramino D font un total de 121. On peut donc imaginer que l'un d'entre eux fasse environ le quart de 121 soit 30.
Selon la forme du tétramino D on aura les quatre nombres suivants 30 ; 31 ; 32 ; 40.
La somme de ces 4 nombres fait 133 soit 12 de trop. En retirant 3 à chaque nombre, la réponse apparait tout simplement : **27 ; 28 ; 29 ; 37 dont le total fait bien 121.**

Exercice 10 – *Même aire –* 10 points -3e
Thème : Grandeurs et mesures **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Aire, triangle, agrandissement, réduction, Thalès, homothétie, triangles semblables.



La commune de Thalesheim possède un terrain triangulaire représenté sur le plan ci-contre par le triangle ABC. Elle souhaite partager ce terrain en deux zones d'aires égales. Sur l'une des zones, il est prévu d'aménager une aire de jeux pour enfants et sur l'autre un skatepark.

Pour réaliser correctement ce partage du terrain, l'urbaniste a suivi le plan de construction suivant :

- Tracer la hauteur [AH] du triangle ABC.
- Construire le carré AHKL, puis la diagonale [AK].
- Placer le point M sur le segment [AK], tel que : AM = AH.
- Tracer (MN) perpendiculaire à (AH) avec N appartenant à [AH].
- Placer les points D et E points d'intersection de la droite (MN) avec les côtés [AB] et [AC].

Les mesures qu'il a prises sur le plan sont : AH = 12 cm, CH = 5 cm, HB = 9 cm.

L'aire de jeux est représentée par le triangle ADE et le skatepark par le trapèze BCED.

Réaliser cette figure.
Montrer que l'aire de jeux et le skatepark ont effectivement la même aire.

Compétences : Chercher Représenter Raisonner
Capacités : Construire une figure plane, utiliser des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, calculer l'aire d'un triangle, extraire des sous-figures, utiliser des transformations pour calculer des grandeurs géométriques, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique).
Tâches de l'élève : Construction précise, justification, extraction de figures, utilisation de propriétés géométriques.
Barème proposé : 2 pts pour la figure 2 pts pour la mise en évidence du rapport $\sqrt{2}$ 6 pts pour le raisonnement

$\text{Aire de ABC} = \dfrac{\text{AH} \times \text{BC}}{2}$ $\qquad$ $\text{Aire de ADE} = \dfrac{\text{AN} \times \text{DE}}{2}$

On a donc :

$$\frac{\text{Aire de ADE}}{\text{Aire de ABC}} = \frac{\text{AN} \times \text{DE}}{\text{AH} \times \text{BC}} = \frac{\text{AN}}{\text{AH}} \times \frac{\text{DE}}{\text{BC}}$$

Or :

$\dfrac{\text{AN}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{DE}}{\text{BC}}$ (triangles semblables) et $\dfrac{\text{AN}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AM}}$ (car AH=AM)

On a donc $\dfrac{\text{Aire de ADE}}{\text{Aire de ABC}} = \left(\dfrac{\text{AN}}{\text{AM}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ car AM = AN $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré)

L'aire de jeux et le skatepark ont donc bien la même aire.

<u>Autres méthodes :</u>

Triangles semblables, agrandissement-réduction ou homothéties.

<u>Par exemple :</u>

Les triangles ADE et ACB sont semblables (cas des angles égaux) donc on peut s'intéresser au rapport AN/AH (rapport de deux hauteurs se correspondant dans les triangles semblables). Pour le calculer, on peut se placer dans AHK et utiliser le théorème de Thalès (ou à nouveau des triangles semblables). Il donne :

$$\frac{AN}{AH} = \frac{AM}{AK} = \frac{AH}{AH\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ trouvé avec Pythagore ou la trigonométrie. Les aires sont multipliées par :

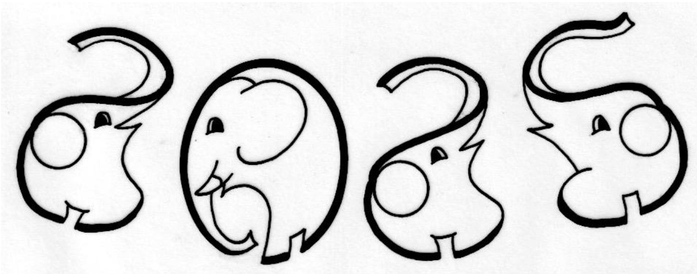
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

L'aire du triangle ADE est donc égale à la moitié de celle du triangle ACB.
On en déduit que l'aire de jeux et le skatepark ont la même aire.

.Exercice 11 – 2025 – 5 points – 2nde
Thème : Nombres et calculs **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Calcul littéral, équation, décomposition en produit de facteurs premiers, diviseurs.

Trouver tous les nombres entiers positifs a et b tels que :

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 2025 \times (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$$



Compétences : Calculer Raisonner
Capacités : Calculer en utilisant le langage algébrique, résoudre algébriquement une équation, résoudre un problème mettant en jeu la divisibilité.
Tâches de l'élève : Calcul, exhaustivité des cas.
Barème proposé : 1 pt par couple de solution : (45 ; 1) et (1 ; 45) ; (5 ; 9) et (9 ; 5) ; (15 ; 3) et (3 ; 15) 2 pts pour le calcul

Soient *a* et *b* deux nombres entiers positifs

$$a^2 + b^2 = 2025 \times \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$a^2 + b^2 = 2025 \times \left(\frac{b^2 + a^2}{a^2 \times b^2}\right)$$

$a^2 \times b^2(a^2 + b^2) = 2025 \times (b^2 + a^2)$ comme a et b sont deux nombres positifs,

en simplifiant par $a^2 + b^2, on\ obtient :\ a^2 \times b^2 = 2025$

On décompose 2025 en facteurs premiers : 2025 = $5^2 \times 9^2 = 5^2 \times 3^2 \times 3^2$

On obtient les couples (a ; b) suivants qui sont les diviseurs de 45 :

(1 ; 45) ; (5 ; 9) ; (15 ; 3) ; (45 ; 1) ; (9 ; 5) ; (3 ; 15)

Exercice 12 – *Probabili − dé* – 7 points – 2nde

Thème : Organisation et gestion des données - Probabilité
Principaux éléments mathématiques travaillés : Probabilité, équation, calcul littéral, produit de fractions.

Deux dés cubiques identiques sont lancés simultanément.
Sur les faces de chaque dé, il n'y a que les nombres 1, 2 et 3.
La probabilité d'obtenir « un double 2 » est $\frac{1}{9}$.
La probabilité d'obtenir « 1 et 2 » est $\frac{1}{3}$.

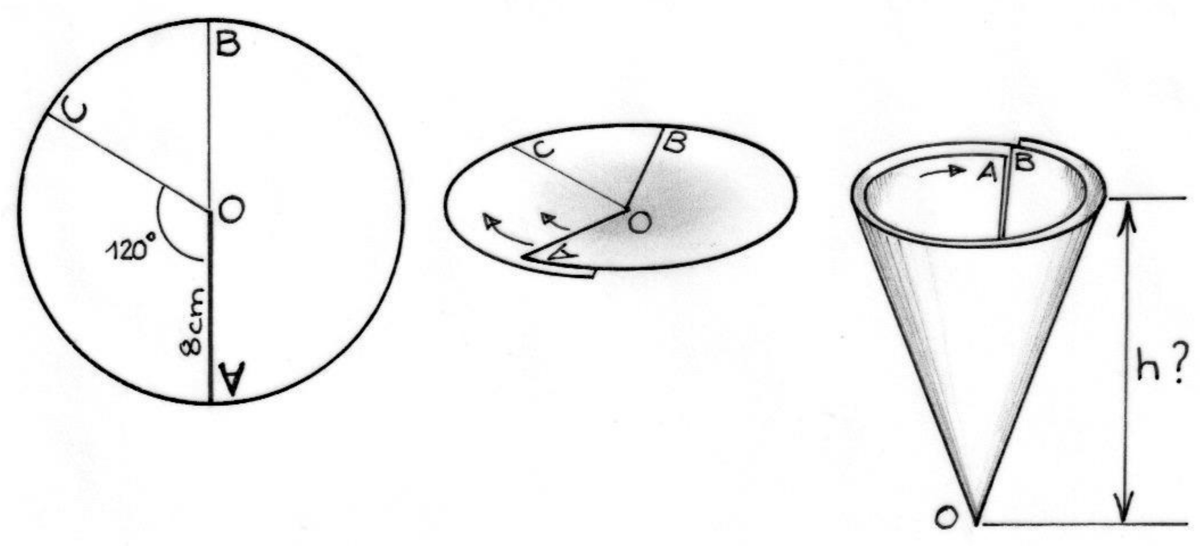
Combien y a-t-il de 1, de 2, de 3 sur chaque dé ? Expliquer.

Compétences : Représenter Calculer Communiquer
Capacités : Choisir un cadre adapté pour présenter et résoudre un problème, résoudre algébriquement des équations, expliquer sa démarche.
Tâches de l'élève : Calcul, explication.
Barème proposé : 3 pts pour le nombre de 2 avec explication (1 pt sinon) 3 pts pour le nombre de 1 avec explication (1 pt sinon) 1 pt pour le nombre de 3

Soit a le nombre de faces du dé portant le chiffre 1 ;
soit b le nombre de faces du dé portant le chiffre 2 ;
soit c le nombre de faces du dé portant le chiffre 3.
$a + b + c = 6$
La probabilité d'obtenir deux fois un 2 est de :
$$\frac{b}{6} \times \frac{b}{6} = \frac{1}{9}$$
On obtient b = 2.
La probabilité d'obtenir un 2 puis un 1 ou un 1 suivi d'un 2 est de :
$$\frac{ab}{36} + \frac{ab}{36} = \frac{2ab}{36} = \frac{a}{9} = \frac{1}{3}$$
D'où a = 3 et finalement c = 1.
On a donc (a ; b ; c) = (3 ; 2 ; 1) : une seule face avec le chiffre 3 ; deux faces avec le chiffre 2 et trois faces avec le chiffre 1.

Sur le dé il y a trois fois le chiffre 1, deux fois le chiffre 2 et une fois le chiffre 3.

Exercice 13 – $Cornet$ – 10 points – 2ndeGT
Thème : Géométrie – Configuration de l'espace **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Cône, hauteur, Pythagore, longueur d'un cercle.



Rémi veut fabriquer un cône en papier, sans base. Il découpe un disque de rayon 8 cm. Il place sur le cercle les points A et B diamétralement opposés et le point C tel que $\widehat{AOC} = 120°$.

Fabriquer ce disque, puis effectuer une entaille correspondante au rayon [OA] du disque. Faire glisser le papier, en maintenant le point A sur la circonférence du disque, de façon à superposer deux points pour obtenir un cône, comme sur la figure ci-dessus

Déterminer la valeur exacte de la hauteur du cône obtenu dans chacun des cas suivants :

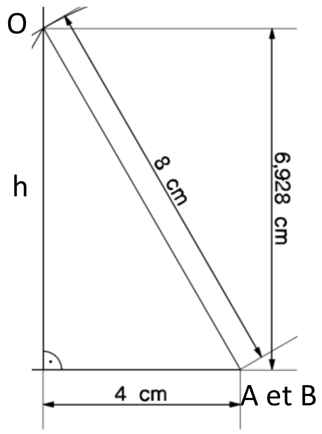
- ***lorsque les points A et B sont superposés,***
- ***lorsque les points A et C sont superposés.***

Compétences : Calculer Représenter Raisonner
Capacités : Construire une figure plane, utiliser des propriétés géométriques pour calculer des longueurs, utiliser et mettre en relation des représentations de solides, choisir et mettre en relation des cadres (numérique et géométrique).
Tâches de l'élève : Calcul, manipulation, construction précise, découpage.
Barème proposé : 4 pts pour le calcul de la hauteur quand A et B se superposent 6 pts pour le calcul de la hauteur quand A et C se superposent

Quand le point A vient sur le point B, le cercle limitant le disque de papier tourne deux fois sur la base du cône. Ainsi le cercle de base du cône est deux fois plus petit que celui du disque, donc son rayon r, deux fois plus petit aussi, est de 4 cm.

Il reste donc à utiliser Pythagore pour trouver la hauteur du cône :

$h = \sqrt{OA^2 - r^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$ cm

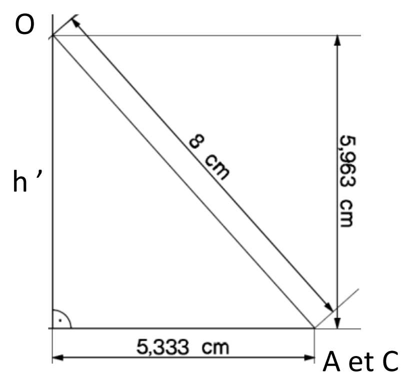


De même, quand le point A vient sur le point C, le cercle limitant le disque de papier tourne trois demi-fois sur la base du cône
(on s'en rend bien compte si l'on a dessiné six angles de 60° au centre du disque de papier).
Ainsi le cercle de base du cône est les deux tiers de celui du disque, donc son rayon r' est aussi les deux tiers de 8.

$r' = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3}$

Il reste donc à utiliser Pythagore pour trouver la hauteur du cône :

$h' = \sqrt{OA^2 - r'^2} = \sqrt{64 - \frac{16^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{320}{9}} = \frac{8\sqrt{5}}{3} \approx 5{,}963$ cm



Lorsque les points A et B sont superposés, la valeur exacte de la hauteur du cône est $4\sqrt{3}$

Lorsque les points A et C sont superposés, la valeur exacte de la hauteur du cône est $\frac{8\sqrt{5}}{3}$**.**

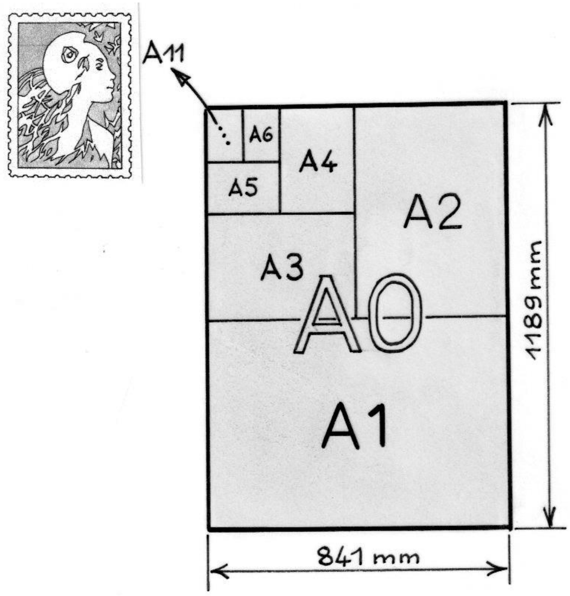
Exercice 13 –*Forme A –10* points - 2ndePro

Thème : Organisation et gestion de données - Tableur
Principaux éléments mathématiques travaillés : Rectangle, longueur, largeur, tableur, tableau, aire, suite.

La norme ISO 216 définit les formats de papier.
Selon cette norme, une feuille de format A0 est un rectangle de 841 mm sur 1189 mm et son aire est très proche d'un mètre carré.

La longueur du format A1 est égale à la largeur du format A0.
La largeur du format A1 est égale à la moitié de la longueur du format A0.

Le format A2 est obtenu de la même manière à partir de la feuille A1.
Et ainsi de suite pour les autres formats.



Quelles sont les dimensions d'un timbre de format A11 ?
Quel est le nombre maximum de timbres de format A11 que l'on peut faire avec une feuille de format A0 en les rangeant tous horizontalement ?
Même question en les rangeant tous verticalement.

L'utilisation d'un tableur pour la résolution de cet exercice est recommandée.

Point culturel :
Un timbre « Marianne de l'avenir » a un format A11.

Compétences : Calculer Représenter

Capacités : Représenter des données à l'aide d'un tableau, utiliser un tableur pour résoudre un problème, interpréter un résultat.

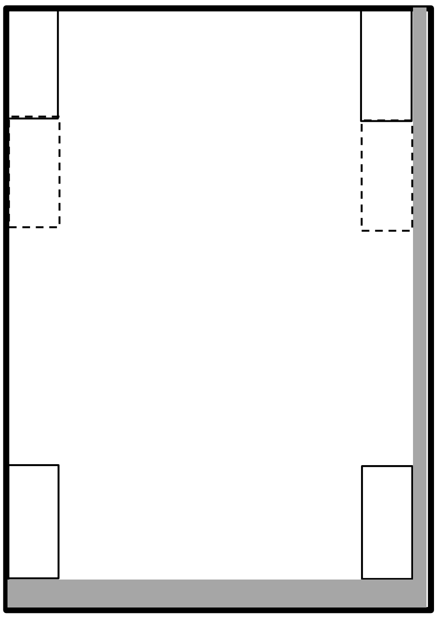
Tâches de l'élève : Utilisation d'un tableur, calcul.

Barème proposé :
4 pts pour les dimensions du timbre A11
4 pts pour l'un des rangements sur la feuille A0 avec le nombre de timbres
2 pts pour l'autre rangement sur la feuille A0 avec le nombre de timbres

Format	Longueur	Largeur
A0	1189,00	841,00
A1	841,00	594,50
A2	594,50	420,50
A3	420,50	297,25
A4	297,25	210,25
A5	210,25	148,63
A6	148,63	105,13
A7	105,13	74,31
A8	74,31	52,56
A9	52,56	37,16
A10	37,16	26,28
A11	26,28	18,58

Les dimensions d'un timbre de format A11 sont : longueur 26,28 mm et largeur 18,58 mm.

En plaçant les timbres « en hauteur » :

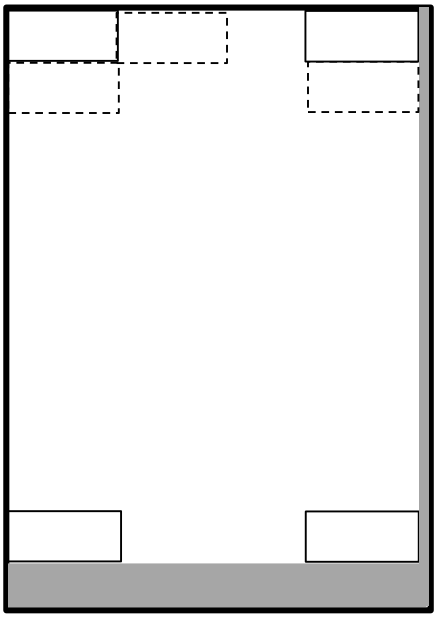


841 : 18,58 ≈ 45 donc 45 timbres sur la largeur, avec 4,9 mm de perte
1189 : 26,28 ≈ 45 donc 45 timbres en hauteur, avec 6,4 mm de perte
Au total dans cette configuration, on pourra placer :
45 × 45 = **2025 timbres**

Calcul de la perte, soit la zone grisée :
4,9 x 1189 + 6,4 x (841 – 4,9) = 11 177,14 mm^2

Aire de la feuille A0 :
841 x 1189 = 999 949
Calcul du pourcentage de perte :
(11 177,14 x 100) : 999 949 ≈ 1,12 %

En plaçant les timbres « en largeur » :



841 : 26,28 ≈ 32 donc 32 timbres sur la longueur,
avec 0,38 mm de perte
1189 : 18,58 ≈ 63 donc 63 timbres en hauteur,
avec 18,46 mm de perte
Au total dans cette configuration, on pourra placer :
32 × 63 = **2016 timbres**

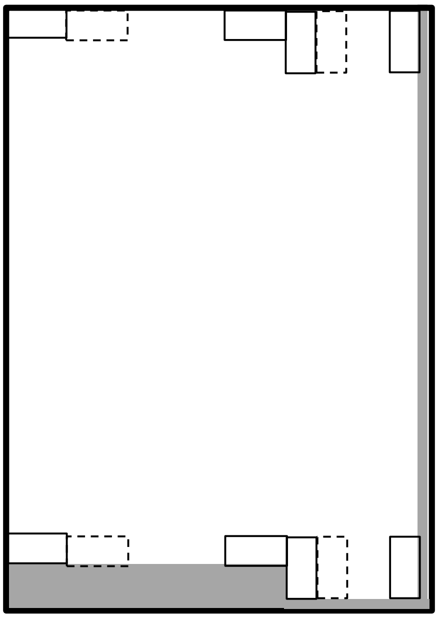
Calcul de la perte, soit la zone grisée :
18,46 x 841 + 0,04 x (1189 – 18,46) ≈ 15 571,68 mm^2

Aire de la feuille A0 :
841 x 1189 = 999 949
Calcul du pourcentage de perte :
(15 571,68 x 100) : 999 949 ≈ 1,55 %

Il est plus avantageux de placer les timbres dans la première configuration, soit en hauteur et, dans ce cas, on peut en placer 2025.

Extension :

Et voilà une autre optimisation : (il y a peut-être encore mieux)



Dans ce cas, certaines colonnes sont en « horizontal » et d'autres colonnes sont en « vertical »

J'ai fait un tableau ci-dessous, pour trouver la solution optimale. (voir tableau ci-dessous)
Je remarque que pour 3 timbres en horizontal et le reste (soit 41) en vertical, la perte est minorée à droite.
Nombre total de timbres :
3 x 63 + 41 x 45 = **2034**
Calcul de la perte :
0,38 x 1189 = 451,82
(3 x 26,28) x (1189 – 63 x 18,58) = 1455,39
(41 x 18,58) x (1189 – 45 x 26,28) = 4875,39
451,82 + 1455,39 + 4875,39 = 6782,6 mm^2
Pourcentage de perte
(6782,6 x 100) : 999 949 ≈ 0,7 %

D'où une bonne optimisation…
On peut sûrement encore mieux faire, mais le découpage sera d'autant plus compliqué !!!

Nbre horizontaux	Largeur restante	Nbre verticaux	Nbre verticaux entier	Largeur utilisée	Largeur non utilisée
0	841	45,264	45	836,1	4,9
1	814,72	43,849	43	798,94	15,78
2	788,44	42,435	42	780,36	8,08
3	762,16	41,020	41	761,78	0,38
4	735,88	39,606	39	724,62	11,26
5	709,6	38,192	38	706,04	3,56
6	683,32	36,777	36	668,88	14,44
7	657,04	35,363	35	650,3	6,74
8	630,76	33,948	33	613,14	17,62
9	604,48	32,534	32	594,56	9,92
10	578,2	31,119	31	575,98	2,22
11	551,92	29,705	29	538,82	13,1
12	525,64	28,291	28	520,24	5,4
13	499,36	26,876	26	483,08	16,28
14	473,08	25,462	25	464,5	8,58
15	446,8	24,047	24	445,92	0,88
16	420,52	22,633	22	408,76	11,76
17	394,24	21,219	21	390,18	4,06
18	367,96	19,804	19	353,02	14,94
19	341,68	18,390	18	334,44	7,24
20	315,4	16,975	16	297,28	18,12
21	289,12	15,561	15	278,7	10,42

22	262,84	14,146	14	260,12	2,72
23	236,56	12,732	12	222,96	13,6
24	210,28	11,318	11	204,38	5,9
25	184	9,903	9	167,22	16,78
26	157,72	8,489	8	148,64	9,08
27	131,44	7,074	7	130,06	1,38
28	105,16	5,660	5	92,9	12,26
29	78,88	4,245	4	74,32	4,56
30	52,6	2,831	2	37,16	15,44
31	26,32	1,417	1	18,58	7,74
32	0,04	0,002	0	0	0,04