Corrigé

Mathématiques sans Frontières Junior
CM2/6ème
- Épreuves de Découverte 2024 -

Épreuve 1 : Encerclé	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Retrouver le nombre à inscrire dans un cercle, sachant qu'un nombre inscrit dans un carré est égal au produit des nombres inscrits dans les 4 cercles placés aux sommets du carré
	- Trouver des facteurs manquants dans un produit de 4 facteurs
	- Décomposer en produits de 2 nombres entiers
	- Répondre en langue étrangère

Il est attendu des élèves qu'ils trouvent, dans un premier temps le quatrième facteur manquant autour du carré 1584. Ils chercheront naturellement le résultat de 2 x 8 x 9 = 144 pour trouver 2 x 8 x 9 x ______ = 1584

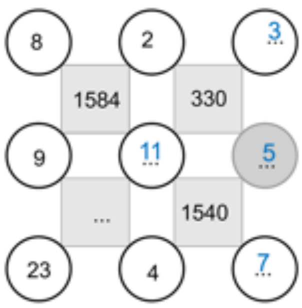
Par tâtonnement, ils chercheront alors 144 x …. = 1584
Dans un deuxième temps l'élève tentera de résoudre :
11 x 2 x ▲ x ⬟ = 330

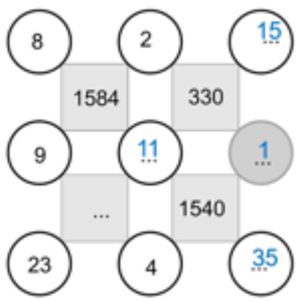
Mais aussi 4 x 11 x ▲ x ◆ = 1540

Ainsi on trouve que : ▲ x ⬟ = 15 et que ▲ x ◆ = 35

L'élève déduira que ▲ vaut alors 1, 3, 5 ou 15. Il préférera probablement 3 ou 5

Il peut être tenté de s'arrêter là en choisissant parmi les 4 solutions disponibles.
Or, il doit encore confronter ses résultats à la dernière équation pour vérifier le nombre inscrit dans le cercle gris.
Il n'aura d'autre choix alors d'inscrire 1 ou 5.





Il y a donc **2 solutions possibles** : dans le cercle gris on peut écrire **1** (1×15 et 1×35) ou **5** (3×5 et 7×5).
Il est attendu des élèves une phrase en langue étrangère (anglais, allemand ou arabe) contenant la réponse.

La "grille" complété n'est pas demandée, mais sert à la résolution et à la vérification du résultat proposé.

Autre formulation possible :

Si l'intérieur d'un carré gris est le produit des nombres écrits dans les cercles à ses 4 sommets, alors à l'inverse ces cercles contiennent des diviseurs du nombre écrit dans le carré correspondant.

Les élèves peuvent donc aussi chercher par division, ce qui est plus efficace :

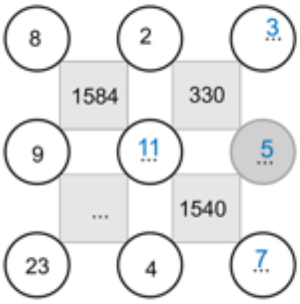
1 584 ÷ 9 ÷ 2 ÷ 8 = 11
Il faut donc écrire 11 dans le cercle central.
Il est intéressant d'expliciter le calcul sous deux formes et de tester les résultats avec les élèves afin d'aborder les priorités opératoires …
1 584 ÷ 9 ÷ 2 ÷ 8 = ? $1584 \div (8{\times}2{\times}9) = ?$

On procède de même pour trouver les diviseurs manquant de 330 et de 1 540 dans les cercles :
330 ÷ 2 ÷ 11 = 15 15 est donc à obtenir avec le produit de deux cercles.
1 540 ÷ 4 ÷11 = 35 35 est également à obtenir avec le produit de deux cercles.

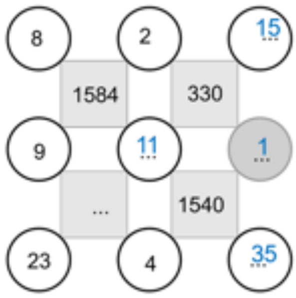
Le cercle gris étant commun à 330 et 1 540, il faut chercher un diviseur commun de 15 et 35.
or 15 = 3 × 5 ou 15 = 1 × 15
et 35 = 7 × 5 ou 35 = 1 × 35

Il y a deux diviseurs communs : 5 et 1.
Chacun peut convenir dans le cercle gris, ce qui donne lieu à 2 solution différentes pour cet exercice.

Solution 1



Solution 2

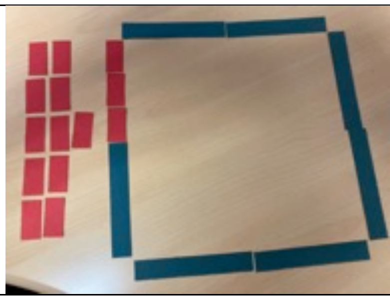


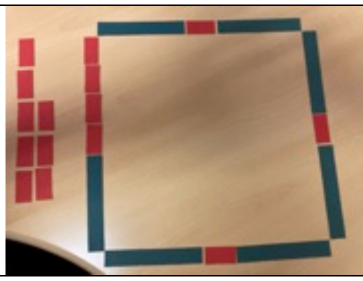
Il peut être intéressant de confronter les deux solutions (si elles ont été trouvées toutes les deux) dans la classe.
Si une seule solution est trouvée, l'enseignant peut demander de trouver l'autre solution en prolongement de cet exercice.

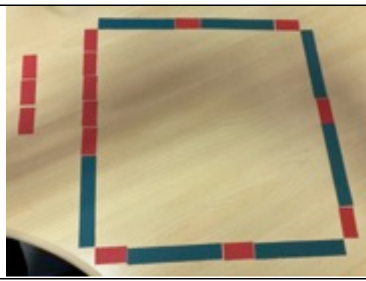
Épreuve 2 : Enclos carré	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Fabriquer un enclos carré le plus grand possible en utilisant un nombre imposé de barrières de deux tailles différentes
	- Utiliser la notion de multiple

L'exercice propose aux élèves de tracer le plus grand carré possible avec des morceaux de segments imposés. Ils doivent donc optimiser le périmètre pour obtenir la surface la plus grande.

Une recherche par tâtonnements peut être menée ainsi :

Constitution d'un carré avec les 7 barrières vertes et 3 rouges : l'élève part bien de la situation proposée par l'énoncé (1 barrière rouge et un verte déjà posées). Il constate bien par observation que la longueur d'une barrière verte correspond à la longueur de 3 barrières rouges.	

Il reste 11 barrières rouges. On peut ajouter une barrière rouge à chaque côté de l'enclos (il restera carré). 8 barrières rouges restes disponibles.	

On peut encore ajouter une barrière rouge supplémentaire par côté (l'enclos restera bien carré). 3 barrières rouges restent.	

→ Il reste 3 petites barrières (ou une grande barrière verte), l'enclos carré le plus grand a un périmètre de 32 u (barrière rouge).

Approche algébrique :

Il s'agit donc de créer 4 cotés de même mesure grâce à :
7 segments de 3 u et 14 segments de 1 u. Ainsi on dispose de 7 x 3 = 21 u et 14 x 1 = 14 u donc 35 unités au total.

Dans les faits on imagine de remplacer une barrière verte par 3 barrières rouges.

Il est indiqué qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les barrières disponibles. Les élèves doivent donc créer 4 côtés les plus grands possibles avec 35 unités. Le plus grand multiple de 4 inférieur à 35 est 32 et correspond à 4 x 8.

Les élèves auront probablement du mal à ne pas tout utiliser. Ils risquent de chercher à ne rien laisser de côté et s'orienter probablement sur un rectangle.

<u>Prolongements</u> :

- On peut alors chercher le nombre minimal de barrières à ajouter pour fermer l'enclos carré le plus grand (1 seule barrière suffira alors afin d'obtenir 36 u de périmètre soit 9u de côté).

- On peut aussi s'intéresser également à l'aire des surfaces créés avec les barrières : avec 32 u de barrières quelle aire obtient on avec un enclos carré. De même quelle surface maximale offrirait un enclos rectangulaires ?

<u>Épreuve 3</u> : Dé-sandwich (Sébastien)

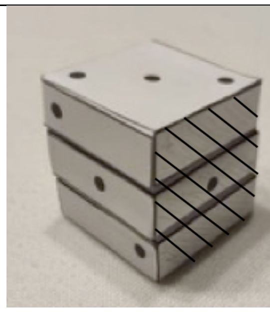
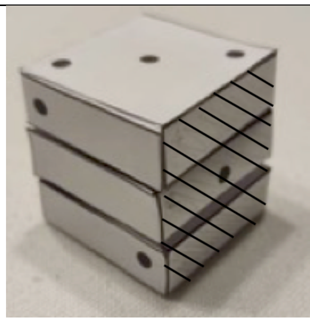
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Construire des pavés à partir des patrons donnés ;
	- Associer 3 pavés pour former un cube en respectant les contraintes de nombre de points des faces opposées.

La première étape à réaliser est de découper les patrons et construire les pavés.

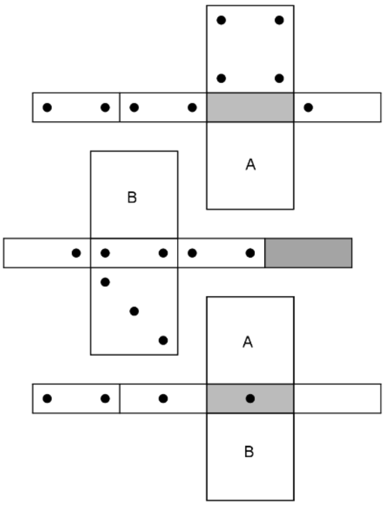
→ Les élèves peuvent rencontrer une première difficulté en raison de l'absence de languettes. Certains s'en passeront en utilisant du scotch. Ceux qui décident d'utiliser de la colle devront mettre des languettes. Il leur faut prendre conscience que pour avoir une arête, il faut mettre en vis-à-vis deux segments du patron, et donc une seule languette par paire de segments. Une stratégie peut être de mettre une languette sur chaque segment, puis couper celles qui sont en trop lors de la construction. On peut aussi positionner une languette un segment sur deux.

Une fois les pavés construits, les élèves doivent comprendre que le pavé comportant deux carrés vides doit être situé entre les deux autres. En collant les faces blanches entre elles, on se retrouve alors avec un 3 sur le dessus et un 4 sur le dessous (ou inversement) et il y a donc 16 possibilités. En retournant la pièce du millieu, on a 16 possibilités de plus. Les élèves peuvent alors procéder par essais-erreurs.

Pour affiner la stratégie, les élèves peuvent se rendre compte que pour obtenir le 1, il faut un rectangle vide au-dessus et en-dessous, et on arrive à 2 cubes possibles (Il y a un 4 sur la face du dessous). Pour ces deux cubes (voir tableau ci-dessous), la somme des nombres des points des facs opposées et bien toujours égale à 7.

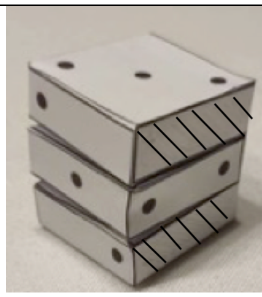
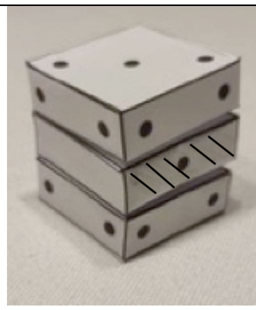
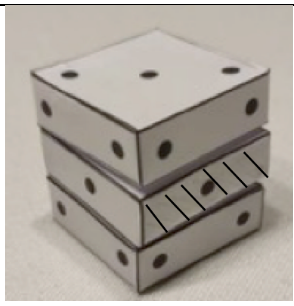
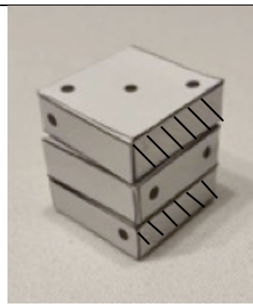
		Vue de devant	Vue de derrière
1^{er} cube possible	Ce cube ne convient pas car tous les nombres entiers de 1 à 6 ne figurent pas sur ses faces (1, 3, 3, 4, 4, 6). Cela peut susciter le débat, car ce n'est pas précisé dans l'énoncé.		
$2^{ème}$ cube possible	Pour ce cube les les six nombres entiers de 1 à 6 apparaissent sur les faces : c'est donc la solution attendue. Vous trouverez ci-après la solution dépliée. Le rectangle hachuré sur la photo de droite correspondent aux rectangles grises sur la solution qui suit.		

Solution dépliée :



Les faces A doivent être collées l'une contre l'autre, tout comme les faces B.

Remarque : En commençant l'exercice d'une autre mani ère on risue d'obtenir deux cubes qui vérifient la contrainte « la somme des nombres des points de deux faces opposées d'un dé est toujours égale à 7 ». Ces cubes ne conviennent pas puisque pas tous les nombres entiers de 1 à 6 n'apparaissent pas.

		Vue de devant	Vue de derrière
Cube 1	Ce cube ne convient pas car tous les nombres entiers de 1 à 6 ne figurent pas sur ses faces (2, 3, 3, 4, 4, 5). Par ailleurs, la représentattion de la constellation 2 n'est pas conventionnelle.		
Cube 2	Ce cube ne convient pas car tous les nombres entiers de 1 à 6 ne figurent pas sur ses faces (2, 2, 3, 4, 5, 5). Ici également, une repésentrtion du 2 n'est pas conventionnelle alors que l'autre oui.		

Épreuve 4 : Pointilliste	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Croiser des informations pour identifier des cases colorées ;
	- Travailler méthodiquement.

Dans cet exercice, les élèves ont à raisonner sur un quadrillage afin de noircir certaines cases en fonction des indications données.
« Entre deux groupes de cases noires il y a au moins une case blanche ». Cette phrase apporte 2 informations essentielles à la résolution de la grille :

- un groupe de cases noires peut être constitué d'une seule case (le 1 l'indique)
- Il peut y avoir plus de 1 case blanche entre 2 cases noires.

Il y a de nombreuses façons de démarrer la résolution de ce problème.

Une méthode de résolution formalisée :

Etape 1 : Barrer les indications déjà représentées dans la grille

Etape 2 : marquer ce qui est certain

- le 2 de la colonne 2
- les cases obligatoirement blanches (celles situées avant ou après 1 groupe de cases noires).

→ Le fait de marquer les cases qui ne peuvent être noires (de part et d'autre de chaque groupe) permet de déduire la répartition des cases noires sur la première ligne.

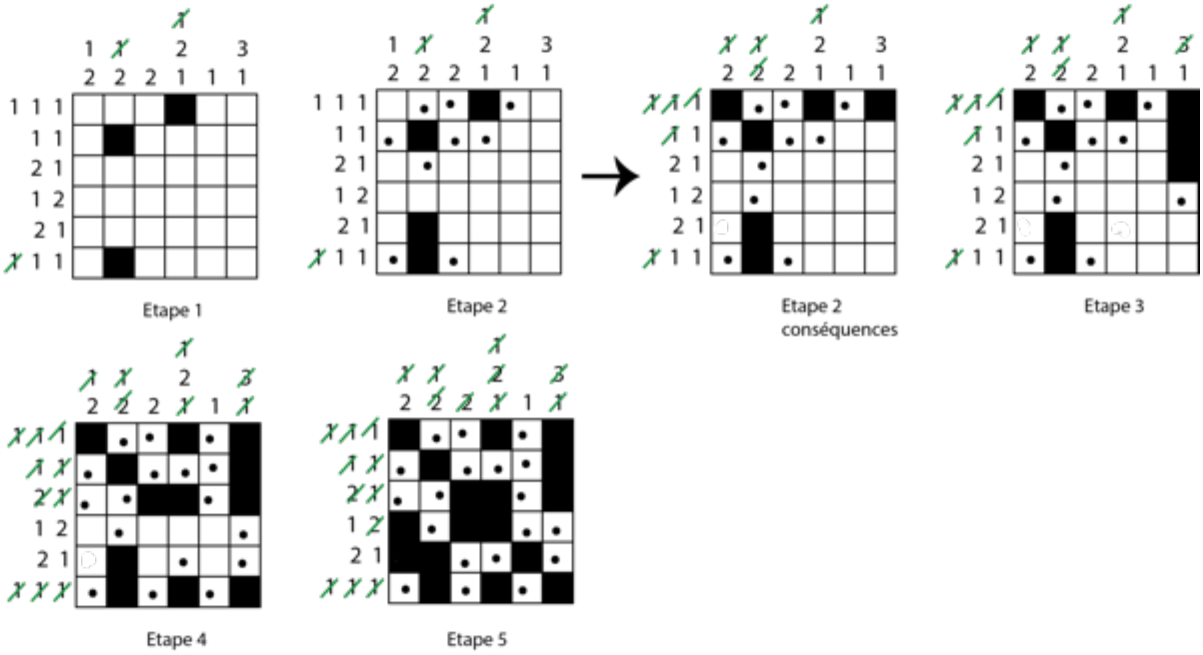
Etape 3 : Ajouter les cases noires dans la dernière colonne. Puis, marquer les cases blanches à la suite des cases noires placées.
Dans la dernière ligne, le seul moyen de colorier 2 cases noires isolées est de laisser une case blanche entre chacune d'elle.

Etape 4 : Dans la ligne 3 les deux seules cases consécutives sont donc noires.

Etape 5 : On traite ensuite les colonnes 3 et 4 où on place la deuxième case noire dans chaque colonne.
Il reste alors des cases non marquées, elles sont donc noires.

→ La résolution nécessite de procéder de façon organisée en barrant systématiquement les contraintes de placement réalisées **et** les cases qui sont obligatoirement blanches.

Une exploitation de cet exercice (ou de tout exercice du type *sudoku*) en construction du lexique mathématique est tout à fait indiquée.
Il s'agit d'exprimer tout raisonnement sous la forme d'un si… alors (voire même d'un si … alors … sinon).
Cette manière de formuler son raisonnement peut être réinvestie dans les activités de programmation événementielles



Cet exercice permet de pointer la nécessité de l'utilisation d'une méthode rigoureuse de résolution. Cette méthode n'est ni plus ni moins qu'un algorithme. Oublier une information conduit inévitablement à l'erreur (incohérence entre les indications et les cases noircies) ou à l'impossibilité de résoudre la grille.

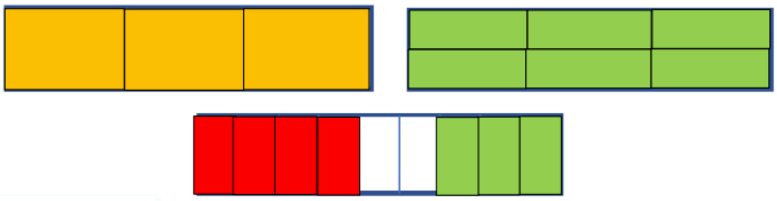
Épreuve 5 : Ils se taillent la part du gâteau	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Associer des parts de gâteaux de tailles différentes pour obtenir des proportions attendues de gâteau ;
	- Identifier des fractions équivalentes.

Il y a de nombreuses solutions possibles.

- Il semble assez « naturel » de commencer par le gâteau numéro 3 qui est le seul à offrir des neuvièmes et donc d'en attribuer 4 parts à Fadi. Ensuite il y a beaucoup de possibilités de servir Léonie et Claude.

Remarque : Si on ne commence pas par les $\frac{4}{9}$ de Fadi, il faudra toujours réserver au moins $\frac{1}{9}$ de gâteau pour Fadi.

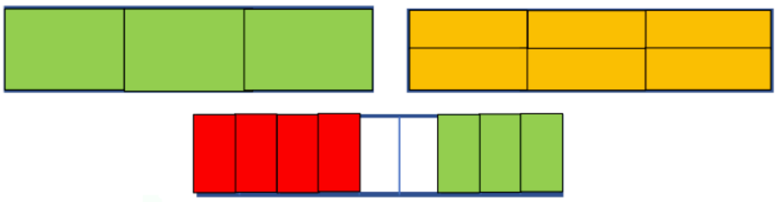
- Sur le document suivant nous vous proposons 4 corrigés différents qui nous semblent représentatifs avec une écriture des partages sous forme fractionnaire. Cette épreuve permet également d'observer l'égalité de certaines fractions. Il convient de comparer ces différentes solutions lors d'une exploitation en classe.



Fadi : $\frac{4}{9}$

Léonie : $1 = \frac{3}{3}$

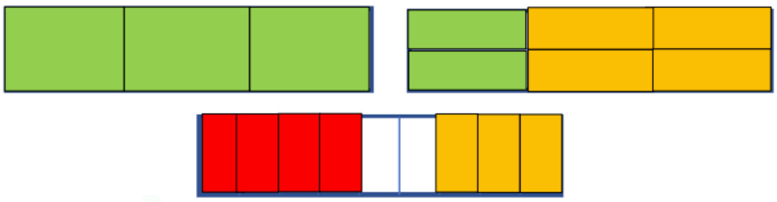
Claude : $\frac{4}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{9}$; $\frac{6}{6} = \frac{3}{3} = 1$



Fadi : $\frac{4}{9}$

Léonie : $1 = \frac{6}{6}$

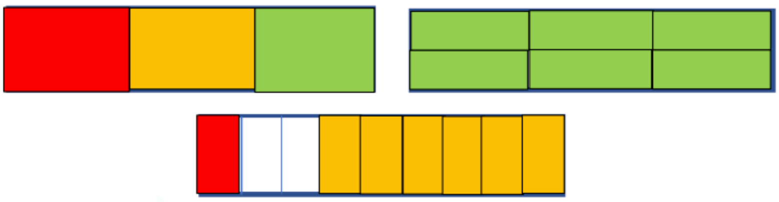
Claude : $\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{9}$; $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



Fadi : $\frac{4}{9}$

Claude : $\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{6}$

Léonie : $1 = \frac{4}{6} + \frac{3}{9}$; $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



Fadi : $\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

Claude : $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{6}{6}$

Léonie : $1 = \frac{1}{3} + \frac{6}{9}$; $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Épreuve 6 : Tout ça pour ça	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- trouver le nombre de nains sachant qu'en lançant les 4 sorts à la suite le nombre de nains à la fin est égal au nombre de nains au départ ;
	- manipuler les 4 opérations

Dans cet exercice, il s'agit en réalité de résoudre une équation contenant les 4 opérations.

On attend de l'élève qu'il procède par essais/erreurs, jusqu'à trouver la solution.

On peut représenter le raisonnement sous forme de tableau :

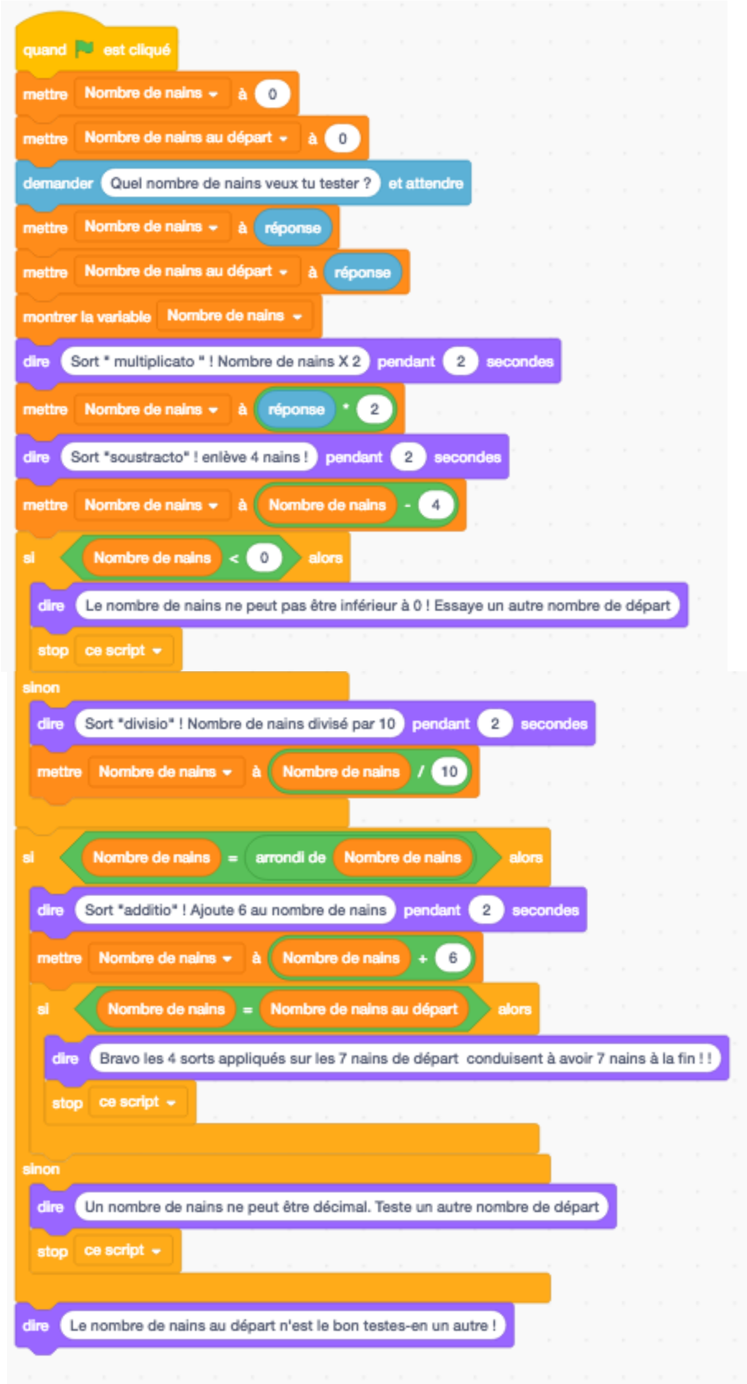
Nombre de nains au départ	**Multiplicato** (multiplie le nb de nains par 2)	**Soustracto** (fait disparaître 4 nains)	**Divisio** (divise le nb de nains par 10)	**Additio** (fait apparaître 6 nains)
1	2	impossible		
2	4	0	0	**6**
3	6	2	impossible	
4	8	4	impossible	
5	10	6	impossible	
6	12	8	impossible	
7	14	10	1	**7**

Il permet de suivre la progression du nombre de nains au fur et à mesure des sorts lancés. Il permet de raisonner sur la conformité de la solution.

Avec 7 nains au départ, on a bien : $(7\times 2-4)\div 10+6=7$ nains à la fin.

L'élève doit être conscient que la division par 10 peut donner un résultat décimal, mais dans le contexte de l'exercice, il s'agit d'un nombre de nains, donc on travaille avec des nombres entiers.

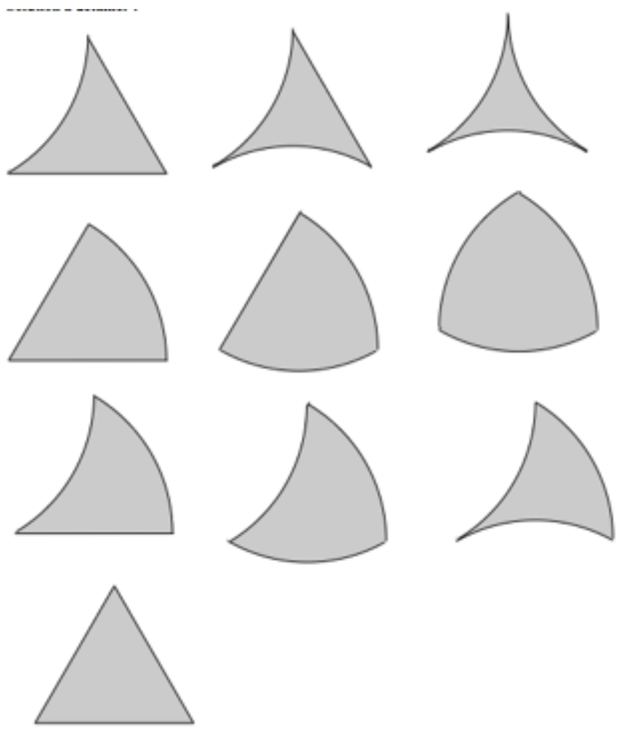
On peut également écrire un programme scratch qui va tester les valeurs proposées par l'élève.
Le programme est disponible à cette adresse : https://scratch.mit.edu/projects/920277828


quand est cliqué
mettre Nombre de nains à 0
mettre Nombre de nains au départ à 0
demander Quel nombre de nains veux tu tester ? et attendre
mettre Nombre de nains à réponse
mettre Nombre de nains au départ à réponse
montrer la variable Nombre de nains
dire Sort " multiplicato " ! Nombre de nains X 2 pendant 2 secondes
mettre Nombre de nains à réponse * 2
dire Sort "soustracto" ! enlève 4 nains ! pendant 2 secondes
mettre Nombre de nains à Nombre de nains - 4
si Nombre de nains < 0 alors
dire Le nombre de nains ne peut pas être inférieur à 0 ! Essaye un autre nombre de départ
stop ce script
sinon
dire Sort "divisio" ! Nombre de nains divisé par 10 pendant 2 secondes
mettre Nombre de nains à Nombre de nains / 10
si Nombre de nains = arrondi de Nombre de nains alors
dire Sort "additio" ! Ajoute 6 au nombre de nains pendant 2 secondes
mettre Nombre de nains à Nombre de nains + 6
si Nombre de nains = Nombre de nains au départ alors
dire Bravo les 4 sorts appliqués sur les 7 nains de départ conduisent à avoir 7 nains à la fin ! !
stop ce script
sinon
dire Un nombre de nains ne peut être décimal. Teste un autre nombre de départ
stop ce script
dire Le nombre de nains au départ n'est le bon testes-en un autre !

<u>Épreuve 7</u> : Buzzle	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Suivre un programme de construction pour construire 10 pièces différentes d'un puzzle.
	- Tracer des arcs de cercle au compas.
	- Tracer des segments à la règle.
	- Savoir reconnaître des figure superposables

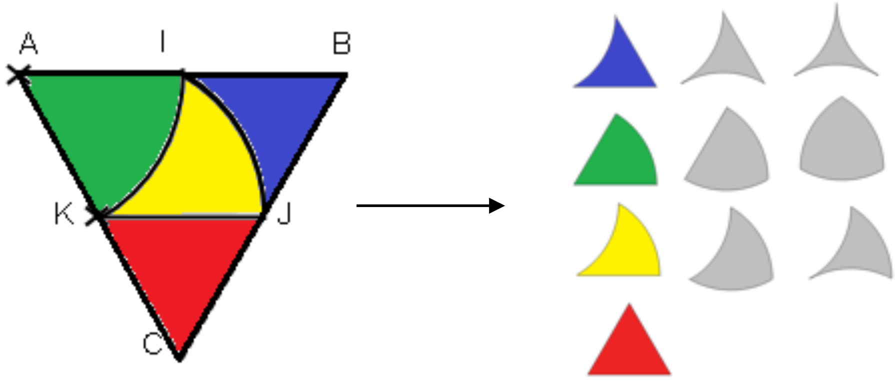
Pour cet exercice, comme il y a 10 formes différentes à trouver, il faut mutualiser plusieurs annexes pour avoir 10 triangles.

Il faut procéder méthodiquement pour trouver les différentes pièces :
- 1 pièce avec pour côtés 3 segments (un triangle équilatéral) ;
- 2 pièces avec pour côtés 2 segments et 1 arc de cercle ;
- 3 pièces avec pour côtés 1 segment et 2 arcs de cercle ;
- 4 pièces avec pour côtés 3 arcs de cercle.



Le premier réflexe des élèves pourrait être de reproduire la pièce de l'exemple. Cette étape est nécessaire car cette pièce fait partie des 10 à fournir.

La méthode « très experte », mais non attendue, est de se rendre compte que l'on peut utiliser les chutes de papier pour obtenir d'autres pièces. Ici, après découpage de la pièce jaune, on peut obtenir une pièce rouge, une bleue et une verte (toutes différentes) avec cette méthode.



La méthode attendue est de tracer des pièces au fur et à mesure, puis de les découper et enfin de vérifier si elles sont différentes ou non.

Pour obtenir les 10 pièces différentes, il faut bien vérifier que deux pièces ne sont pas superposables. On peut les tourner ou les retourner.

Les pièces  et  sont identiques car superposables par rotation.

Les pièces  et  sont identiques car superposables par retournement.

Dasn cet exercice il est tout particulièrement nécessaire de :

- **s'organiser** pour ne pas perdre de temps.

Ils peuvent le faire de différentes manières :

- tout le monde trace, coupe et on met en commun pour trouver les pièces identiques et différentes ;
- un élève trace, un ou deux autres découpent, un dernier vérifie ;
- etc.

- **s'organiser** pour ne pas avoir de doublons.

Ils peuvent éventuellement classer les pièces par type.
Par exemple :

- 3 côtés identiques, 2 côtés identiques, 3 côtés différents ;
- côtés droits, côtés "bombés"/convexes, côtés "rentrants"/concaves
- etc.

Le travail nécessite de la précision et une bonne maitrise du compas. Le soin apporté au découpage et au collage compte également.

Prolongement possible : travailler sur le même principe de pièces avec des côtés droits, convexes ou concaves en partant d'un carré.

Exemple : 

Épreuve 8 : Pas de bougie, bougie …	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Dénombrer le nombre de bougies soufflées par l'ensemble des élèves d'une classe de CM2 depuis leur naissance.
	- Poser des hypothèses, les énoncer clairement, pour réaliser une estimation

Il est attendu des élèves dans cet exercice de justifier leur réponse. Pour ce faire il doivent :

- poser les hypothèses (effectif de la classe, âge moyen des élèves) qui peuvent être le reflet exact de la classe qui participe au concours. Il est nécessaire que les hypothèses soient clairement énoncées.
- Présenter clairement la démarche de résolution (calculs, tableaux).

Différentes approches et modes de présentation sont possibles :

a) Nous pouvons recourir à un tableau pour présenter ce dénombrement pour un élève.

âge	Nb de bougies à chaque date anniversaire	Nb de bougies soufflées depuis la naissance
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
6	6	21
7	7	28
8	8	36
9	9	45
10	10	55
11	11	66

Si nous supposons qu'un élève de CM2 a 10 ans et qu'une classe comprend 25 élèves, le nombre total de bougies soufflées par l'ensemble des élèves d'une classe sera :

55 x 25 = 1 375 bougies

b) Nous pouvons aussi imaginer le dénombrement de l'ensemble des bougies soufflées chaque année par l'ensemble des 25 élèves.

âge	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nb de bougies chaque année	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275
Nb de bougies depuis la naissance	25	75	150	250	375	525	700	900	1 125	1 375	1 650

c) Pour traiter cet exercice nous pouvons également parler d'estimation basse (si l'âge retenu est de 9 ans, par exemple) et d'estimation haute (pour un âge de 11 ans) dans le but de réaliser un encadrement d'une réponse vraisemblable.

d) <u>Prolongements possibles :</u>

- A l'inverse de la démarche précédente, nous pourrions demander aux élèves de déterminer l'âge de Paul qui a soufflé 465 bougies depuis sa naissance (la réponse est 30 ans).

Ou encore : Julie affirme qu'elle a soufflé 635 bougies à son dernier anniversaire. Est-ce possible ? (Non. Pour 35 ans elle souffle 630 bougies et pour 36 ans elle en souffle 666).

- Cet exercice permet de présenter le tableur et de parler d'effectifs cumulés.

Épreuve 9 : 24	
Dans cet exercice, l'élève doit :	- Décompter le nombre de jours avant de voir en direct à la TV un même épisode d'une série
	- Observer la progression simultanée de 2 suites

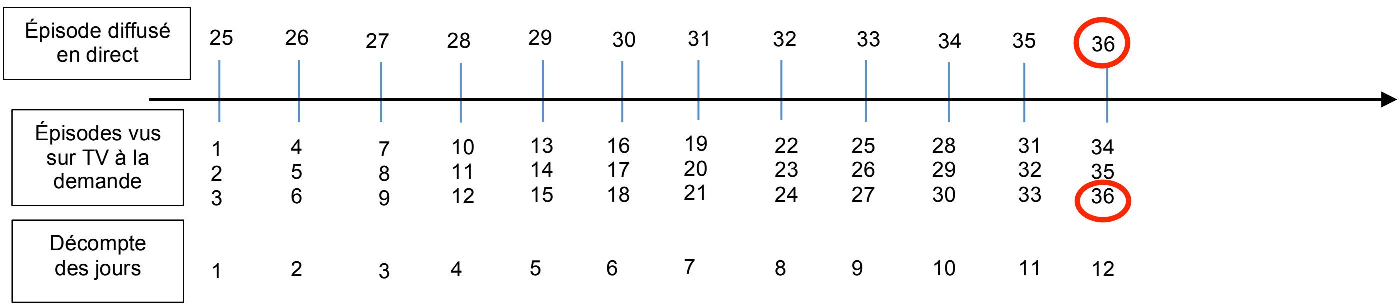
Le défi de l'exercice consiste en la représentation de la progression parallèle de deux cadences de visionnement des épisodes d'une même série : le direct et le replay.

Nous pouvons représenter l'écoulement du temps dans un tableau :
Au jour n°1 Justine et sa maman visionnent les 3 premiers épisodes sur le service de TV à la demande, dans le même temps l'épisode 25 est visible en direct.

Décompte du nombre de jours de visionnement de la série par Justine	Numéros des épisodes vus par Justine et sa maman	N° des épisodes diffusés sur TV MsF-Ju
1	1 – 2 – 3	25
2	4 – 5 - 6	26
3	7 – 8 - 9	27
4	10 – 11 - 12	28
5	13 – 14 - 15	29
6	16 – 17 - 18	30
7	19 – 20 - 21	31
8	22 – 23 - 24	32
9	25 – 26 - 27	33
10	28 – 29 - 30	34
11	31 – 32 - 33	35
12	34 – 35 – (36)	36

Nous observons que l'épisode 36 est diffusé en direct le 12^{e} jour et qu'à la même date Justine et sa maman visionnent les épisodes 34 et 35. Certainement auront-elles regardé le direct après le rattrapage des épisodes 34 et 35.

Il est également possible de tracer un axe du temps horizontal et d'y indiquer les visionnements respectifs des épisodes par le service de TV à la demande et par le direct :



Nous observons bien que le douzième jour Justine et sa maman peuvent visionner l'épisode 36 de la série après avoir vu le 34 et le 35.