

**Exercice 2 – Prof'il'âge – 5 points -****Thème :** Nombres et calculs

Équations

**Principaux éléments mathématiques travaillés :**

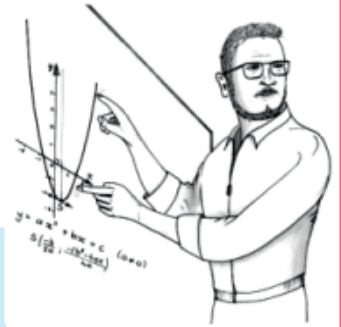
Calcul littéral, Équations, algèbre

**PROF'IL'ÂGE**

Lorsqu'on demande l'année de naissance à une personne, elle ne donne souvent que les deux derniers chiffres de l'année. Par exemple, elle dit :

"Je suis née en 11, ou en 92 ou en 78"

C'est ainsi que Jean, professeur de mathématiques, né avant l'an 2000, dit : "Cette année, en 2024, j'ai l'âge de mon année de naissance".



**Calculer l'âge de Jean.**

**En 2024, le petit-fils de Jean peut-il dire la même chose ?**

**Expliquer votre raisonnement.**

Résolution d'un problème arithmétique verbal complexe. Différentes procédures possibles. Raisonnement à expliquer.

**Compétences :** Calculer Chercher Reasonner

**Capacités :**

Résoudre des problèmes en utilisant des équations, persévérance, organisation, expliquer un raisonnement, se représenter une situation.

**Tâches de l'élève :**

Mise en équations et résolution, essai-erreur, essais ajustements, mise en équation, représentation, choix d'un cadre, technique de la fausse position

**Barème proposé :**

2 pts : 1 pt pour chaque réponse : 62 et 12

3 pts pour toutes les explications ou un raisonnement différent d'un essai-erreur bien explicité (valoriser par 1 pt un raisonnement essai-erreur explicité)

Soit  $x$  l'âge du prof.

Il faut résoudre l'équation :  $1900 + x = 2024 - x$

$$2x = 124$$

$$x = 62$$

Jean est né en 1962 et a 62 ans en 2024.

Jean étant né en 1962, on peut supposer qu'il n'a été grand-père qu'après 38 ans et donc que son petit-fils est né après 2000. Soit  $x$  l'âge du petit-fils de Jean.

Il faut résoudre l'équation :  $2000 + x = 2024 - x$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

Son petit-fils, né en 2012, a 12 ans en 2024.

**Pour aller plus loin :**

« Est-ce que, quelle que soit son année de naissance, on arrive à un âge où son année de naissance est égale à son âge ? »

Soit A l'année de naissance « complète » d'une personne P et E l'année où elle se pose la question « Ai-je l'âge de mon année de naissance ? » en prenant dans cette expression pour « mon année de naissance » la valeur a où  $A - a$  est un multiple de 100.

En l'année E l'âge de P est :  $E - A$ . Il suffit donc de prendre  $E = A + a$  pour que cet âge soit a.

La réponse à la question posée est : oui, dans la majorité des cas. On peut toujours trouver une année qui réponde à la question, mais cela n'est pas toujours réaliste.

Quelqu'un né en 1923 a 23 ans en 1946. ( $1946 = 1923 + 23$ )

Quelqu'un né en 1958 a 58 ans en 2016. ( $2016 = 1958 + 58$ )

Quelqu'un né en 2013 a 13 ans en 2026. ( $2026 = 2013 + 13$ )

| Exercice 2 – Prof'il'âge – 5 points -                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Bilan de correction</b></p> <p><b>Barème appliqué réellement</b></p> <p><b>Erreurs rencontrées/ copies remarquables</b></p> |

L'énoncé a été compris mais l'exercice a été **moyennement** réussi

Les solutions ont été trouvées, souvent vérifiées mais les explications du raisonnement sont souvent partielles voire inexistante, y compris pour les groupes qui ont utilisés l'algèbre pour résoudre le problème.

La consigne « Expliquer votre raisonnement » a été diversement comprise par les élèves. Ils ont compris dans leur grande majorité que donner la réponse du problème n'était pas suffisant, cependant certains groupes ont simplement écrit des calculs ou résolu des équations, sans préciser sur quoi portent ces calculs ou ces équations. Souvent, ils avaient obtenu la réponse par essai successif plus ou moins organisés et raisonnés, puis ils ont cherché un calcul ou une équation aboutissant à la même réponse en utilisant les valeurs présentes dans l'énoncé. Il a donc été difficile de repérer les raisonnements corrects sans explication. Le correcteur doit alors émettre des hypothèses sur le raisonnement du groupe sans certitude de la validité de ces hypothèses, ce qui rend l'évaluation difficile. C'est pourquoi, les explications ont été valorisées lorsqu'elles étaient présentes. A notre sens, l'intérêt principal de cet exercice est le nombre de procédures de résolutions possibles. Un objectif pour l'enseignant qui donnerait ce problème à résoudre à ces élèves de la 4<sup>e</sup> à la 2<sup>e</sup> serait d'exploiter toutes les procédures utilisées par ces élèves afin d'enrichir le panel de procédures de chacun.

Il permet aussi d'évaluer la compétence communiquer car il demande aux élèves d'expliquer leur procédure. (qui serait préférable à expliquer votre raisonnement).

Ce problème notamment est intéressant pour illustrer la méthode de la fausse position. Cette méthode est peut-être plus efficace qu'une résolution algébrique pour ce problème.

1<sup>er</sup> étape : choix d'une année de naissance pour « sonder » la situation, par exemple 1965

En 2024, un professeur né en 1965 a 59ans.

2<sup>e</sup> étape : analyse des résultats obtenus : il y a 6 ans d'écart entre le nombre qui s'écrit avec les deux derniers chiffres de l'année et l'âge du professeur.

3<sup>e</sup> étape : le raisonnement : il faut donc répartir équitablement ces 6 ans sur les deux nombres c'est-à-dire 3 ans de plus pour le premier et 3 ans de moins pour le second (cela revient à chercher le centre de l'intervalle d'extrémités ces deux nombres) :  $59 + 3 = 65 - 3 = 62$

4<sup>e</sup> étape : conclusion : Le professeur est donc né en 1962 et a 62 ans en 2024.

### Les différents types de raisonnements rencontrés

Tâtonnements ; Essais / Erreurs ; Essais / Ajustements

Schémas ou dessins

Mise en équation / résolution algébrique

Raisonnement arithmétique (décomposition du problème en sous- problèmes basiques résolus par des calculs.

Résolution inattendue : le passage (souvent implicite) par la notion de centre et de rayon d'un intervalle (centre : point équidistant des extrémités, rayons : distance entre le centre et les extrémités).

### Barème réellement appliqué

Le barème dépendant de la méthode de résolution : 3pt pour la question concernant l'âge de Jean et 2 pts pour la question concernant l'âge de son petit-fils. Dans de nombreuses copies, les stratégies n'étaient pas les mêmes pour la recherche de l'âge de Jean et la recherche de l'âge de son petit-fils.

- Stratégie d'essais-erreurs (essais non organisés ou peu organisés, pas de conclusion liée au résultat de chaque essai)

Pour Jean et/ou son petit-fils

- 0,5 pt pour un essai infructueux complet avec les calculs apparents
- 0,5 pt pour un test sur quelques valeurs
- 0,5 pt pour la solution
- 0,5 pt pour la vérification.

Une seule fois pour les deux

1 pt pour la mention de l'unicité de la solution soit par référence à la formulation de l'énoncé, soit par un argument

- Stratégie d'essais- ajustements (essais non organisés ou peu organisés, pas de conclusion liée au résultat de chaque essai)

Pour Jean et/ou son petit-fils

- 0,5 pt pour un essai infructueux complet avec les calculs apparents
- 0,5 pt pour un test sur quelques valeurs
- 0,5 pt pour la solution
- 0,5 pt pour la vérification.

Une seule fois pour les deux

1 pt pour un argument permettant de limiter les essais en prenant en compte les résultats des essais précédents (raisonnement sur les écarts).

- Stratégie étude exhaustive de tous les cas possibles

Pour Jean et/ou son petit-fils

- 1 point pour la mention de la méthode

- 1 point la présentation de l'ensemble des résultats (tableau) avec mise en valeur de la solution.

Pour Jean

1 point pour la justification des bornes de l'intervalle de recherche (Jean est né après... et avant ...)

- Stratégie « Milieu centre »

Pour Jean et/ou son petit-fils

- 1 point pour le calcul de l'amplitude suivi du calcul du rayon de l'intervalle de recherche
- 1 point pour la détermination du centre de l'intervalle de recherche

Une seule fois pour les deux

1 point pour les explicitations du raisonnement (explicitations des sous problèmes, qualifications des résultats).

**Stratégie algébrique**

Pour Jean et/ou son petit-fils

- 1 pt algébrisation explicite des contraintes de l'énoncé (sur quelle grandeur portera l'équation, quelle(s) contrainte(s) exprime(nt) les membres)
- 0,5 pt la mise en équation
- 0,5 pt pour la résolution

Une seule fois pour les deux

- 0,5 pt pour explicitation des inconnues
- 0,5 pt pour l'explicitation des réponses (l'âge de Jean est..., l'âge du petit fils est ...)

### Les erreurs les plus fréquentes

- réponse erronée sans explication,
- réponse trouvée sans explication,
- réponse trouvée mais explications erronées,
- réponse trouvée mais explications incomplètes :
  - méthode par essais s'arrêtant dès qu'une solution est trouvée sans justification de son unicité,
  - difficultés de rédaction : les inconnues ne sont pas explicitées (utilisation de lettre sans signification),
  - absence d'explication lors de la mise en équation : une égalité est produite sans que l'on comprenne sur quoi elle repose.

### Copies remarquées :

*Extraits de copie*

L'âge de Jean est...  
 $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$   
 $= 8 \times 11 \times 23$   
 $11 \times 23 = 253$  ce qui fait 1931  
 $31 \times 2$   
 $= 62$  ans en 2024

1) Calculer:  $24 + 24 = 48$   
 $2000 - 48 = 1962$   
 $2024 - 1962 = 62$  (ans)  
 Explication: Tout d'abord pour calculer l'âge de Jean nous avons effectué les calculs ci-dessous et nous avons trouvé que Jean a 62 ans. Pour trouver ce résultat, nous avons d'abord additionné les deux derniers chiffres de l'année 2024 ce qui nous a donné 48, que nous avons soustrait avec 2000 car il est né avant l'année 2000. Ce qui nous a permis de trouver sa date de naissance qui est 1962. Pour trouver son âge on a soustrait l'année 2024 avec son année de naissance (1962). Enfin pour trouver son âge qui est de 62 ans.

Jean est né avant l'an 2000 donc dans l'ère  
 1900.  
 On sait qu'en 2024, il a l'âge de son oncle de naissance.  
 Soit :  
 $2 \times 24 - 2 = 6$   
 $2 \times 22 - 2 = 2$   
 Il est né en 62 = 1962 (donc il a 62 ans).  
 L'âge l'année est du type « 2000 », on multiplie le chiffre des milliers aux celui des unités.  
 Ici, l'année comporte 1 dizaine en plus. Donc on multiplie le chiffre des milliers aux celui des unités tout en soustrayant le chiffre des dizaines au résultat. (on répète le processus par le chiffre de l'unité et de la dizaine, soit  $2 \times$ ).

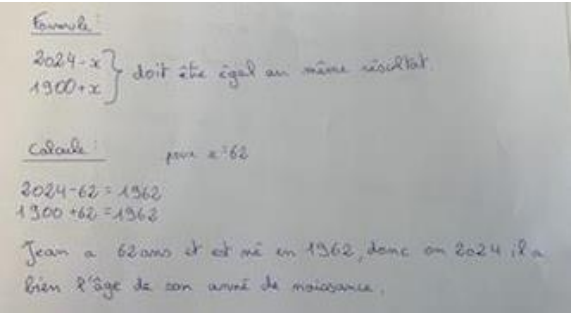
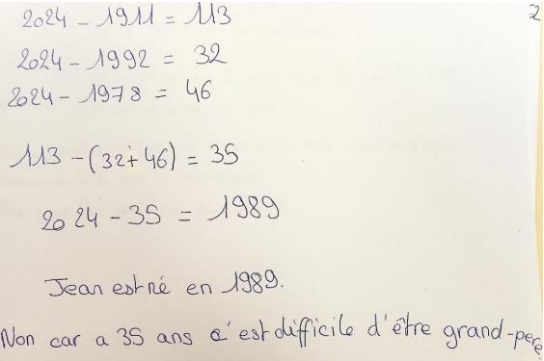
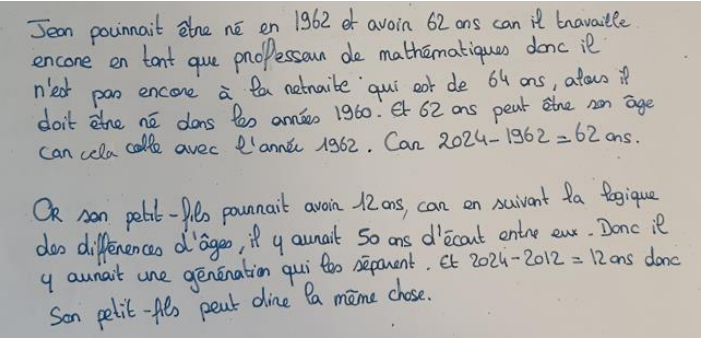
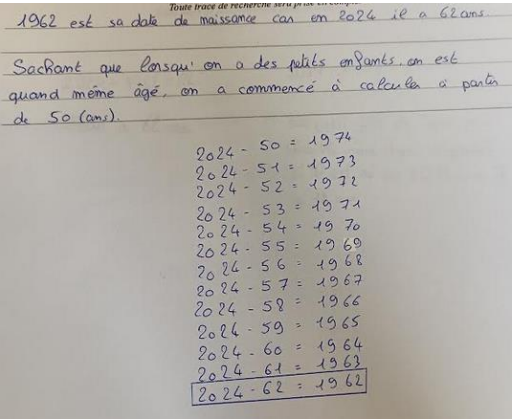
*Analyse :*

La solution est trouvée par ces différents groupes.

Cependant, la justification n'a pas de sens mathématiques. Dans la deuxième copie, elle repose sur une erreur de calcul ( $2000 - 48$  ne fait pas 1962 mais 1952).

Les correcteurs pensent que les élèves ont trouvé la solution par une des procédures basées sur une démarche de tâtonnement. Cependant, estimant que cette démarche n'était pas celle attendue, ils ont essayé de montrer que l'on pouvait trouver la réponse directement à partir des données du problème. S'en suit une sorte de « compte est bon » pour obtenir 1962 plus ou moins inspiré par ce qui a été vu en classe afin de s'appuyer sur un « modèle mathématiques » à l'image de ce qui est attendu par les enseignants de mathématiques lors d'une évaluation.

Dans la même idée, mais en passant par un habillage de type « algèbre » on trouve :

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |  <p>Le problème est partiellement traduit en algèbre mais certainement résolu par tâtonnement.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Extrait de copie</b></p> <p>Lorsqu'on demande l'année de naissance à une personne, elle ne donne souvent que les deux derniers chiffres de l'année. Par exemple, elle dit :</p> <p>"Je suis née en 11, ou en 92 ou en 78"</p> <p>C'est ainsi que Jean, professeur de mathématiques, né avant l'an 2000, dit : "Cette année, en 2024, j'ai l'âge de mon année de naissance".</p>  | <p><b>Analyse :</b></p> <p>Cette copie est une illustration encore plus marquante de la stratégie que nous avons nommée « L'âge du capitaine » en référence au problème de G. Flaubert et à l'ouvrage de S. BARUK cependant, dans me cas présent, on pouvait résoudre le problème.</p> <p>Les élèves prélèvent dans l'énoncé tous les nombres en écriture chiffrée puis à l'aide d'additions et de soustractions, ils essayent d'obtenir un résultat qui peut convenir pour une année de naissance « lointaine ».</p> <p>Mais, une difficulté apparaît lors d'une tentative de feedback sur la réponse trouvée : l'« âge » obtenu est possible pour un professeur de mathématiques mais n'est pas celui attendu pour un grand père.</p> <p>On ne peut pas savoir si le « Non » qui ouvre la phrase de conclusion remet en cause l'énoncé (le fait que Jean soit grand-père ou la réponse trouvée).</p> |
| <p><b>Extrait de copie</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p><b>Analyse :</b></p> <p>Les élèves ont trouvé la réponse certainement par une méthode de tâtonnement, cependant, pour justifier, ils cherchent des arguments leurs vies quotidiennes basés sur des règles « sociales ». Le contrat implicite de la preuve mathématique n'est ici pas respecté.</p> <p>Ces élèves sont-ils conscients que ce type de justification ne correspond pas à ce qui est attendu ? Utilisent-ils ces arguments parce qu'ils ne parviennent pas à justifier leur solution en utilisant les outils mathématiques ? La trace écrite ne nous permet pas de répondre à cette question.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>Extrait de copie</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p><b>Analyse :</b></p> <p>Certains groupes ont défini un intervalle d'âge possible pour le professeur grand-père.</p> <p>Ici, un grand père a au moins 50 ans pour ces élèves. Ils ont alors testé tous les âges à partir de 50 ans.</p> <p>D'autres groupes ont défini un âge maximum pour un</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |



|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |                                                                                           |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10  | On a éliminé de<br>1901 à 1940<br>car il serait trop<br>jeune pour avoir<br>un petit-fils |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |                                                                                           |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |                                                                                           |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |                                                                                           |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  | On a éliminé de<br>1971 à 2000 car<br>il serait trop âgé<br>pour travailler               |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |                                                                                           |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |                                                                                           |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |                                                                                           |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |                                                                                           |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |                                                                                           |

professeur (cela dépendait des groupes, de 60 ans qui ne permettait pas trouver la solution à 70 ans...)

Dans tous les cas, les correcteurs ont accepté les arguments mais ont été vigilants à l'étude exhaustive des cas dans l'intervalle établi (dans la première illustration, il manquait la justification d'une borne supérieure, 63 ans voire 64 ans auraient dû être étudiés)

Extrait de copie

Il faut que le chiffre des unités de l'année de naissance que l'on cherche soit le même que le chiffre des unités de l'âge que l'on obtiendra en faisant une soustraction telle que année actuelle - année de naissance = âge actuel.

Il faut donc ici que le chiffre des unités soit 2 car  $2+2=4$  et 2024 se termine par 4.

Nous avons donc chercher des années de naissance qui se termine par 2 en chiffre des unités.

Nous avons essayer la soustraction avec plusieurs années de naissance finissant par 2 et lorsque nous avons noté :  $2024 - 1962 = 62$ , on a su qu'on se rapprochait du résultat.

On a donc essayé  $2024 - 1962 = 62$  et c'était le bon résultat car 1962 se termine par 62 qui est l'âge actuel.

Donc Jean a 62 ans.

Analyse :

Une autre stratégie pour éviter l'étude exhaustive d'un quarantaine de cas est de se baser sur des arguments concernant les multiples et les diviseurs : ici, si le chiffre des unités du double du nombre recherché est 4 alors nécessairement le nombre recherché à pour chiffre des unités 2.

Cependant, ce n'est pas exact car le chiffre des unités pourrait aussi être 7 (ce serait le cas si le problème avait été posé en 2014).

Extrait de copie

a)  $\frac{124}{2} = 62$

$100 - 62 = 38$

$38 + 24 = 62$

L'âge de Jean est de 62 ans

On sait que Jean est né avant 2000 mais logiquement pas avant 1900 donc on prend comme échelle 1900 à 2024. Entre 1900 et 2024 il y a 124 ans, sachant qu'on veut que les deux derniers chiffres de son année de naissance soit les mêmes que de son âge, on va donc diviser 124 par 2, ce qui donne 62. On en déduit que Jean est né en 1962 et qu'il a 62 ans.

Analyse :

La méthode de recherche du centre ou du rayon d'un intervalle a été souvent utilisée.

Le plus souvent il s'agissait de l'intervalle [1900 ; 2024].

La recherche du centre aboutissait à l'année de naissance, celle du rayon (moitié du diamètre) à l'âge du professeur.

Parfois comme dans la première illustration, le calcul n'était pas justifié. (la vérification montre aussi que les élèves n'étaient sûrs de leur méthode).

Extrait de copie

Nous essayons chaque valeur entre 24 et 100 grâce à l'application TABLEAU de la calculatrice.

Nous tapons les équations :

-  $f(x) = 2024 - x$

-  $g(x) = 1900 + x$

et nous voyons que la seule réponse possible est 62. Jean a donc 62 ans.

Analyse :

Certains groupes on choisit le cadre des fonctions pour traiter le problème. Deux fonctions apparaissent sans précision de ce qu'elles représentent et de ce que

L'âge minimum de Jean est de 25 et son âge maximum est de 99.  
 Son âge minimum est de 25 car il faut qu'il soit né avant les années 2000 et âge maximum 99 car son année de naissance ne doit pas dépasser deux chiffres sur les deux derniers. Pour trouver son âge utilisons Python :

```
for test_age in range(25,99):
    naissance = 1900 + test_age
    if 2024 - naissance == test_age: print(test_age)
```

Son âge selon le script est de 62 ans car  $2024 - 1962 = 62$  soit son âge.

désigne la lettre x.

Le raisonnement implicite est basé sur le même principe que les travaux ci-dessous, à savoir la recherche d'un nombre équidistant de 1900 et de 2024.

La résolution se fait par l'étude exhaustive de toutes les valeurs entières de 24 à 100 à l'aide de deux tableaux de valeurs obtenus avec calculatrices.

D'autres groupes ont représenté les deux fonctions pour une résolution à l'aide du graphique.

Pour le second groupe, le traitement algorithmique est exprimé en langage Python. Il est curieux que la variable nommée « naissance » soit définie par  $1900 + \text{test\_age}$  au lieu de  $2024 - \text{test\_age}$ .

L'égalité ainsi testée porte donc sur l'âge comme étant l'écart entre l'année en cours et l'année de naissance plutôt que sur l'année de naissance équidistante de 1900 et de l'année en cours comme dans la plupart des autres raisonnements de type algébrique.

#### Extrait de copie

Date de naissance =  $x$   $x < 2000$   
 Âge = deux derniers chiffres de la date de naissance

Pour trouver le résultat nous avons procédé à des essais

|                    |              |                    |
|--------------------|--------------|--------------------|
| $2024 - 29 = 1995$ | $29 \neq 95$ |                    |
| $2024 - 60 = 1964$ | $60 \neq 64$ | Le résultat est 62 |
| $2024 - 62 = 1962$ | $62 = 62$    |                    |

Pour vérifier le résultat obtenu, on effectue une équation :

$$2024 = (1900 + x) + x \quad 2024 - 62 = 1962$$

$$2024 = 1900 + 2x$$

$$2024 - 1900 = 1900 + 2x - 1900$$

$$124 = 2x$$

$$\frac{124}{2} = x$$

$$62 = x$$

Donc Jean a 62 ans.

#### Analyse :

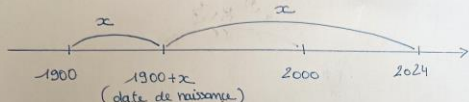
Dans cette copie, on assiste à un va et vient entre la résolution algébrique et la résolution par tâtonnement.

La solution est d'abord trouvée par une méthode d'essai ajustement (on s'approche de plus en plus de la solution)

La lettre x désigne au début l'année de naissance (nombre compris entre 1900 et 2000), puis le nombre qui s'écrit avec « les deux derniers chiffres de la date [année] de naissance » (nombre compris entre 0 et 99) et pour finir l'âge du professeur.

L'égalité support de l'équation n'est pas explicitée (on ajoute le temps écoulé depuis 1900 à l'âge à l'année de naissance (tous deux désignés par la lettre x), le nombre obtenu doit correspondre à 2024

#### Extrait de copie



$x$  : c'est l'âge de Jean  
 $1900 + x$  : année de naissance de Jean

$$1900 + 2x = 2024$$

$$1900 - 1900 + 2x = 2024 - 1900$$

$$2x = 124$$

$$x = 124 : 2$$

$$x = 62$$

$S = \{62\}$

#### Analyse :

Le raisonnement de ce groupe apparaît clairement. L'inconnue est définie.

L'équation traduit le schéma mais ne correspond pas au raisonnement utilisé pour produire le schéma.

Le raisonnement utilisé pour le schéma porte sur l'année de naissance déterminée par deux manières distinctes :

en retranchant l'âge du professeur à l'année en cours ce qui se traduit par l'expression  $2024 - x$

et, comme l'âge correspond aux deux derniers chiffres de l'année de naissance c'est-à-dire au nombre d'années

→ Jean a 62 ans et est né en 1962

|  |                                                                                                                                                                                      |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>écoulées depuis 1900, on peut aussi exprimer l'année de naissance par <math>1900 + x</math><br/>L'équation à résoudre serait donc plutôt<br/><math>2024 - x = 1900 + x</math></p> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|