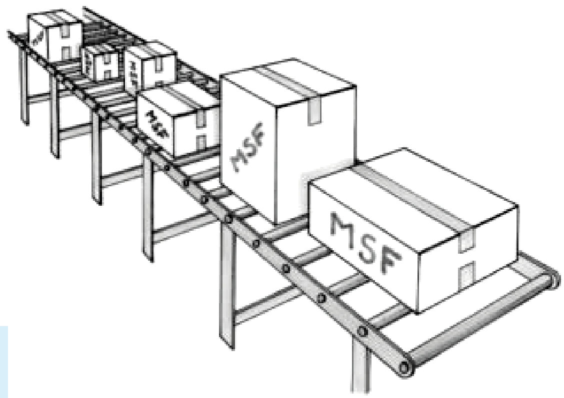
Exercice 5 – *Colis en ligne* – 7 points -
Thème : *Nombres et calculs*
Équations
Principaux éléments mathématiques travaillés :
Équations, calcul littéral, division euclidienne.

EXERCICE 5

7 POINTS

COLIS EN LIGNE

La société MsF prépare et expédie des colis dans le monde entier.
40 colis numérotés de 1 à 40 sont posés, les uns derrière les autres, sur un tapis roulant qui les achemine vers le camion de livraison.
La masse totale de ces 40 colis est de 106 kg.
La somme des masses de trois colis quelconques qui se suivent est toujours égale à 8 kg. Les colis numérotés 20 et 21 ont exactement la même masse.



Déterminer les masses des colis numérotés 20 et 21.
Expliquer votre démarche.

Cet exercice met en scène 40 colis numérotés de 1 à 40, avec une masse totale de 106 kg. Les élèves doivent déterminer la masse des colis numérotés 20 et 21, sachant qu'ils ont la même masse et que la somme des masses de trois colis consécutifs est de 8 kg.
Les enjeux principaux résident dans la capacité des élèves à modéliser la situation en utilisant des outils mathématiques (équation, système d'équations, …) afin de résoudre le problème. De plus, ils doivent être en mesure d'expliciter clairement leur raisonnement et de vérifier la cohérence de leurs résultats.

Compétences : *Chercher Modéliser Calculer Communiquer*
Capacités : *Extraire d'un document les informations utiles, traduire en langage mathématique une situation réelle, mettre un problème en équation, résoudre algébriquement une équation, expliquer une démarche.*
Tâches de l'élève : *Modélisation d'un problème, mise en équation et résolution, schématiser un problème, disjonction de cas, possibilité de résolution par essais et erreurs.*
Barème proposé : 2 pts pour la masse d'un des colis. 3 pts pour une des solutions avec le raisonnement : la masse de chacun des colis 20 et 21 est 2 kg. 2 pts pour la deuxième solution : la masse de chacun des colis 20 et 21 est 3 kg.

Éléments de correction :

Soient a, b et c les masses respectives des trois premiers colis.
La somme des masses de trois colis quelconques qui se suivent est donc toujours égale à 8 kg, donc : a + b + c = 8. La masse totale des 40 colis est 106 kg.
Comme 40 = **13** $\times$ 3 + 1, on aura **13 fois la somme (a + b + c)** dans 106 kg.

La masse du dernier colis est donc : 106 – 13 $\times$ (a + b + c) = 106 – 13 $\times$ 8 = 2 kg.
Parmi les trois colis, **deux** ont la même masse.

1er cas : L'un des colis a une masse de 2 kg et les deux autres ont la même masse.
a = 2 et b = c
a + b + c = 8
2 + 2b = 8, donc b = 3.
Les colis 20 et 21 ont une masse de 3 kg et le colis 19 a une masse de 2 kg.

2e cas : Il y a deux colis de 2 kg.
a + 2 + 2 = 8
a = 8 – 4 = 4
Les colis 20 et 21 ont une masse de 2 kg et le colis 19 a une masse de 4 kg.

Exercice 5 – *Colis en ligne* – 7 points -

Bilan de correction
Barème appliqué réellement
Erreurs rencontrées/ copies remarquables

L'exercice a été globalement bien compris mais moyennement réussi. La majorité des élèves ont trouvé la solution (masse des colis 20 et 21) mais n'ont pas suffisamment explicité leur démarche/raisonnement. Nous avons remarqué qu'une grande partie des élèves se sont contentés d'un résultat qui fonctionnait sans forcément expliquer la provenance de ce dernier, ni vérifier qu'il validait toutes les conditions de l'énoncé.

Barème réellement appliqué

- Aucun point si raisonnement faux, même si le résultat final est juste
- 2 points pour la masse d'un des colis, avec justification
- 2 points pour la solution (3kg-3kg-2kg), sans raisonnement
- 3 points pour la solution (3kg-3kg-2kg), avec test de triplets (essais-erreurs)
- 1,5 points pour la présence de la périodicité dans le raisonnement
- 7 points résolution « experte » (méthodes adapté et bien rédigé)

Les différents types de raisonnements rencontrés

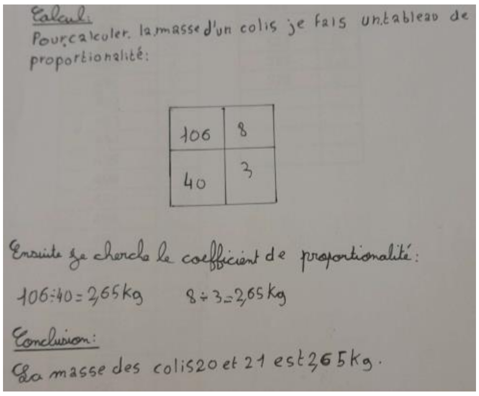
Raisonnements corrects :
- Calcul de la masse du 40ème colis à l'aide d'une division euclidienne, constatation et utilisation de la périodicité pour déterminer les deux autres colis.
- Mise en équation du problème et résolution
- Essais/erreurs : recherche de triplets vérifiant les conditions de l'exercice

Raisonnements incorrects :
- Proportionnalité (tableau, produit en croix, coefficient de proportionnalité)

Recherche d'un triple et vérification d'une seule condition

Les erreurs les plus fréquentes

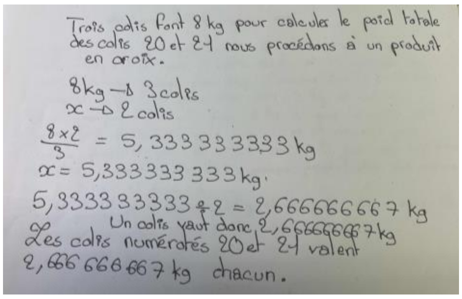
<table>
<tr>
<td>
Des élèves de 3ème ont utilisé un tableau de proportionnalité :



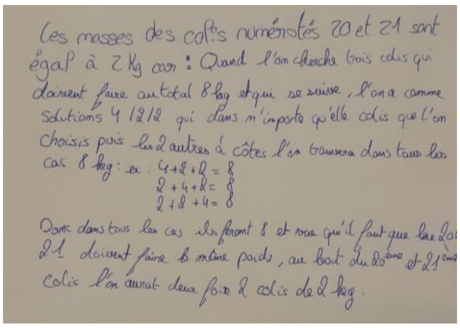
Calcul:
Pour calculer la masse d'un colis je fais un tableau de proportionnalité:

106	8
40	3

Ensuite je cherche le coefficient de proportionnalité:
106÷40=2,65kg 8÷3=2,65kg
Conclusion:
La masse des colis 20 et 21 est 2,65kg.
</td>
<td>
Le groupe d'élèves part du principe que chaque colis a la même masse. Ils modélisent alors la situation à l'aide d'un tableau de proportionnalité afin d'obtenir un coefficient de proportionnalité, ce qui les amène à un résultat erroné.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Des élèves de 3ème ont utilisé les produits en croix :



Trois colis font 8 kg pour calculer le poid totale des colis 20 et 21 nous procédons à un produit en croix.
8kg → 3 colis
x → 2 colis
$\frac{8\times 2}{3}$ = 5,333333333 kg
x = 5,333333333 kg.
5,333333333 ÷ 2 = 2,666666667 kg
Un colis vaut donc 2,666666667 kg
Les colis numérotés 20 et 21 valent 2,666666667 kg chacun.
</td>
<td>
Ce groupe d'élèves part également du principe que chaque colis a la même masse. Ils effectuent un produit en croix leur permettant d'obtenir la masse de 2 colis, puis divisent par 2 afin d'avoir la masse d'un colis. Ce qui conduit à un résultat faux.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Des élèves de 3ème ont fait une vérification partielle :

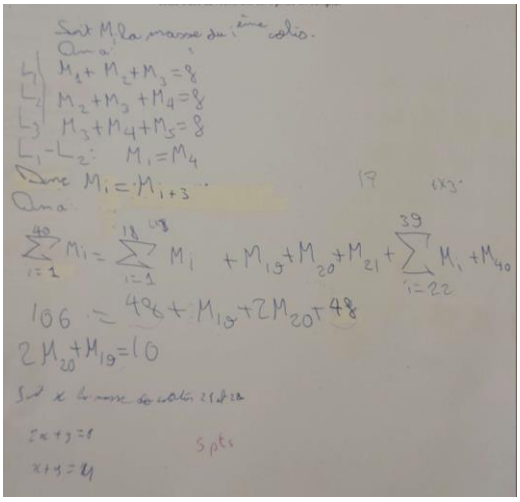


Les masses des colis numérotés 20 et 21 sont égal à 2 Kg car : Quand l'on cherche trois colis qui doivent faire au total 8 kg et qui se suive, l'on a comme solutions 4 / 2 / 2 qui dans n'importe qu'elle colis que l'on choisis puis les 2 autres à côtes l'on trouvera dans tous les cas 8 kg : ex : 4+2+2 = 8
2+4+2 = 8
2+2+4 = 8
Donc dans tous les cas ils feront 8 et vue qu'il faut que les 20 21 doivent faire le même poids, au bout du 20ème et 21ème colis l'on aurait deux fois 2 colis de 2 kg.
</td>
<td>
Ce groupe d'élèves a trouvé un triplet qui semblait être une solution potentielle mais n'ont vérifié que partiellement les conditions :

- La somme des masses de trois colis consécutifs est égale à 8kg : vérifiée
- La somme des masses des 40 colis vaut 106kg : non vérifiée

Ce qui les a empêché de remarquer que leurs résultats étaient erronés.
</td>
</tr>
</table>

Copies remarquables



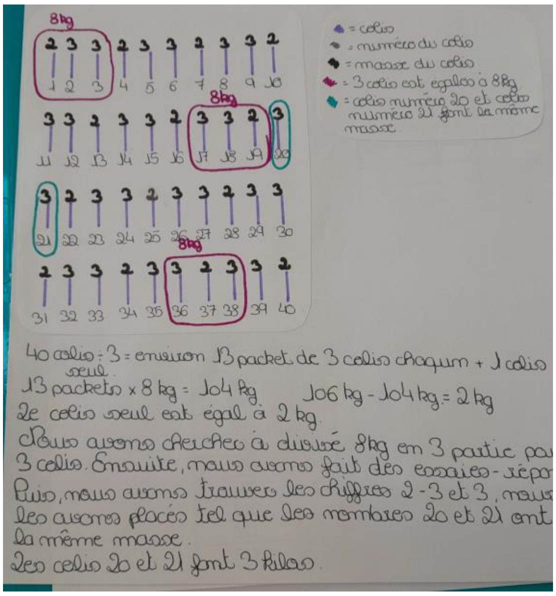
Résolution originale, inattendue :

Ils ont raisonné de la sorte :

- Utilisation d'un système à trois équations permettant de trouver la périodicité ($M_i = M_{i+3}$)
- Somme des M_i pour trouver la masse des colis n°20 et n°21

Le raisonnement est correct, néanmoins, lors du calcul de la somme des masses, un oubli (M_{40}) ne permet pas d'obtenir un résultat final.

Il s'agit d'une résolution inattendue puisqu'elle se base sur l'utilisation de sommes, qui est hors-programme pour des élèves de 2nde.

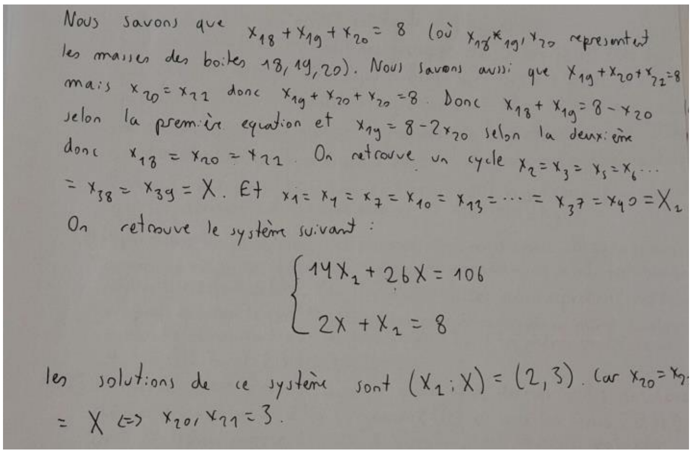


Belle résolution, correcte avec une jolie illustration :

Ils ont raisonné de la sorte :

- Calcul de la masse du 40ème colis à l'aide d'une division euclidienne
- Essais-erreurs pour déterminer la masse des deux autres colis.

Ce groupe d'élèves a bien explicité la méthode utilisée (essais-erreurs) et a fourni une jolie illustration mettant en lumière la périodicité des valeurs.



Nous savons que $x_{18}+x_{19}+x_{20}=8$ (où x_{18}, x_{19}, x_{20} representent les masses des boites 18, 19, 20). Nous savons aussi que $x_{19}+x_{20}+x_{21}=8$ mais $x_{20}=x_{21}$ donc $x_{19}+x_{20}+x_{20}=8$. Donc $x_{18}+x_{19}=8-x_{20}$ selon la première equation et $x_{19}=8-2x_{20}$ selon la deuxième donc $x_{18}=x_{20}=x_{21}$. On retrouve un cycle $x_2=x_3=x_5=x_6\cdots=x_{38}=x_{39}=X$. Et $x_1=x_4=x_7=x_{10}=x_{13}=\cdots=x_{37}=x_{40}=X_1$

On retrouve le système suivant :

$$\begin{cases} 14X_1+26X=106 \\ 2X+X_1=8 \end{cases}$$

les solutions de ce système sont $(X_1;X)=(2,3)$. Car $x_{20}=x_{21}=X \Leftrightarrow x_{20}, x_{21}=3$.

Résolution remarquable, correcte :

Ce groupe d'élèves a utilisé des équations pour déduire une relation entre les masses des colis 18, 19 et 20. En remarquant que les colis 20 et 21 ont la même masse, ils ont pu établir une équation supplémentaire. Ce qui leurs a permis d'obtenir un système d'équations qu'ils ont alors résolu.

Il s'agit d'une résolution « experte », c'est-à-dire une approche méthodique en utilisant des équations. Cette méthode est appropriée pour ce type d'exercices.

Il a été assez compliqué pour les correcteurs d'aligner un barème, juste et cohérent, prenant en compte tous les différents types de production.

En effet, lors de la correction des copies, nous avons rencontré des difficultés liées à la notation, principalement en raison de l'importance accordée au raisonnement dans la résolution de l'exercice, comme spécifié dans l'énoncé : les élèves ne décrivaient pas toujours de manière assez explicite toutes leurs étapes de raisonnement, mais leurs traces de recherche laissaient entrevoir une compréhension du problème.

Cela a rendu difficile la mise en place d'un barème précis entre les correcteurs, ce qui a occupé une grande partie de notre temps de correction.

Les élèves partaient souvent directement du principe que la valeur de la masse des colis était un entier.

<u>Différentes corrections possibles de l'exercice en fonction du niveau choisi.</u>

<u>Correction 1</u> : Niveau 3ème

Prérequis : Calcul littéral, division euclidienne, résolution d'équation à une inconnue

Nous avons 40 colis au total. On cherche à déterminer combien de groupes complets de trois colis nous pouvons former.

On effectue la division euclidienne de 40 par 3 et on obtient : $40 = 13 \times 3 + 2$

On a donc 13 groupes de 3 colis et 1 colis isolé.

D'après l'énoncé, la somme des masses de trois colis consécutifs est de 8 kg, et la masse totale des 40 colis est de 106 kg. En posant x comme la masse du colis isolé, nous obtenons l'équation suivante :

$$106 = 13 \times 8 + x$$
$$106 = 104 + x$$
$$x = 2$$

Donc, le colis isolé pèse 2kg.

En regroupant les colis par trois et en partant du premier, on obtient alors que le 40ème colis pèse 2kg.

Notons x_i la masse du $i^{ième}$ colis. On a alors :

$$x_{38} + x_{39} + x_{40} = 8$$

$$x_{38} + x_{39} + 2 = 8$$

$$x_{38} + x_{39} = 6$$

En prenant les 37ème, 38ème et 39ème colis, on obtient :

$$x_{37} + x_{38} + x_{39} = 8$$
$$x_{37} + 6 = 8$$
$$x_{37} = 2$$

Donc, le 37ème colis pèse 2kg.
En continuant le même raisonnement, on trouve que : $x_{40} = x_{37} = x_{34} = x_{31} = \cdots = x_{19} = 2$

Or, on sait que : $x_{20} = x_{21}$ et que : $x_{19} = 2$. Alors :

$$x_{19} + x_{20} + x_{21} = 8$$
$$2 + 2x_{20} = 8$$
$$2x_{20} = 6$$
$$x_{20} = 3$$

Donc, les masses des colis 20 et 21 sont tous deux 3kg.

***Correction 2** : Niveau 3ème*

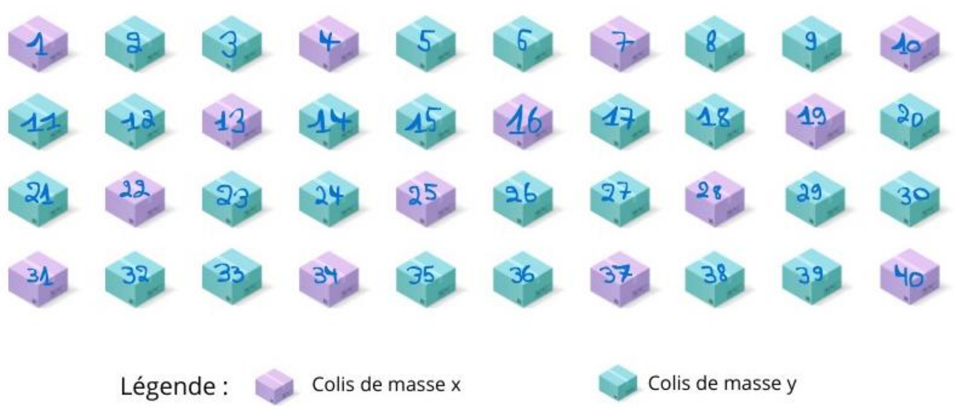
Prérequis : Division euclidienne, calcul littéral, résolution d'équation

D'après l'énoncé, la somme des masses de trois colis consécutifs est de 8 kg, et les colis 20 et 21 ont la même masse.
On note m_i la masse du $i^{ème}$ colis. On a alors, le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} m_{19} + 2m_{20} = 8 \\ 2m_{20} + m_{22} = 8 \end{cases}$$

Donc, $m_{19} = m_{22}$

En prolongeant ce raisonnement, nous observons que la masse de chaque groupe de 3 colis suit un schéma similaire :



Avec $x = m_{19}$ et $y = m_{20}$

Nous avons alors trois possibilités de triplet : (1,1,6) ; (2,2,4) ; (3,3,2). Or, la somme des masses des 40 colis doit être égal à 106kg.

1ère possibilité : (1,1,6)

$$26 \times 1 + 14 \times 6 = 110 \neq 106$$

2ème possibilité : (2,2,4)

$$26 \times 2 + 14 \times 4 = 108 \neq 106$$

3ème possibilité : (3,3,2)

$$26 \times 3 + 14 \times 2 = 106$$

En testant ces possibilités, nous constatons que seule la troisième possibilité, (3,3,2), satisfait cette condition. Ainsi, les colis 20 et 21 ont une masse de 3 kg chacun.

<u>Correction 3 :</u> Niveau Seconde

Prérequis : Calcul littéral, résolution d'un système d'équations à deux inconnues

Pour cette correction, nous allons commencer le raisonnement de la même manière que pour la correction précédente, puis introduire un système par la suite. Ce qui nous donne :

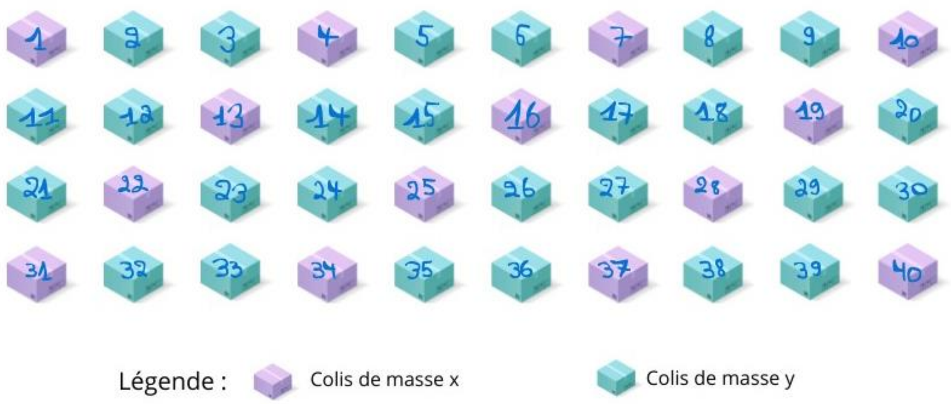
D'après l'énoncé, la somme des masses de trois colis consécutifs est de 8 kg, et les colis 20 et 21 ont la même masse.

On note m_i la masse du $i^{ème}$ colis. On a alors, le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} m_{19} + 2m_{20} = 8 \\ 2m_{20} + m_{22} = 8 \end{cases}$$

Donc, $m_{19} = m_{22}$

En prolongeant ce raisonnement, nous observons que la masse de chaque groupe de 3 colis suit un schéma similaire :



Mathématiques SANS Frontières

En dénombrant le nombre de colis de masse x, on en trouve 26.
En dénombrant le nombre de colis de masse y, on en trouve 14.

Ainsi, d'après l'énoncé on a que la somme de toutes les masses est de 106kg.
Autrement dit, on a : $26x + 14y = 106$

De plus, toujours d'après l'énoncé, on sait que la somme des masses de trois colis consécutifs est de 8kg. Or, si on regarde notre schéma ci-dessus, on s'aperçoit que dans un trio de colis, il y en a toujours 2 qui ont la même masse x et 1 colis qui la même y.

On peut alors noter que : $2x + y = 8$
On arrive alors à un système de deux équations à résoudre :

$$\begin{cases} 26x + 14y = 106 & L_1 \\ 2x + y = 8 & L_2 \end{cases}$$

Passons à résolution. On commence par faire disparaître les y, on va alors multiplier L_2 par 14 et soustraire ensuite L_1 par L_2 :

$$\begin{cases} 26x + 14y = 106 & L_1 \\ 14 \times 2x + 14 \times y = 14 \times 8 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26x + 14y = 106 & L_1 \\ 28x + 14y = 112 & L_2 \end{cases}$$

On soustrait alors L_1 par L_2 :

$$\begin{cases} 26x + 14y - (28x + 14y) = 106 - 112 & L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ 28x + 14y = 112 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x = -6 & L_1 \\ 28x + 14y = 112 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 & L_1 \\ 28 \times 3 + 14y = 112 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 & L_1 \\ y = 2 & L_2 \end{cases}$$

On connaît alors les deux masses de colis $x = 3kg$ et $y = 2kg$.
Donc, les colis n°20 et n°21 ont pour masse 3kg chacun.