

EXERCICE
7 POINTS
FONDATION

5

Des nombres sont inscrits sur des briques. Le nombre inscrit sur chaque brique est égal à la somme des nombres inscrits sur les deux briques situées juste en dessous.

Trouver les nombres manquants.
Expliquer le raisonnement.

Il s'agissait d'une pyramide à compléter. Le nombre inscrit sur chaque brique doit être égal à la somme des nombres inscrits sur les deux briques situées juste en-dessous.

Les enjeux de cet énoncé sont :

- les résolutions d'équations à une ou plusieurs inconnues
- raisonner → trouver une manière de résoudre l'exercice en trouvant des propriétés entre les nombres
- calculer → pour déterminer un nombre ou pour vérifier les raisonnements
- communiquer → savoir justifier les raisonnements

2. Impression globale

Notre impression globale est que l'exercice a été bien réussi.

Une des problématiques la plus fréquente a été de formuler une justification (souvent il n'y avait même aucune justification). Certains élèves ont tenté de mettre le problème en équation, mais n'ont pas abouti et ont fini de résoudre le problème en procédant à des essais-réajustements.

A la marge, certains élèves ont utilisé des nombres décimaux, ainsi que des nombres relatifs.

3. Barème réellement appliqué

Nous avons séparé la partie haute et la partie basse de la pyramide, car nous avons pu remarquer que certains élèves ont pu trouver les trois valeurs du haut de la pyramide, sans pour autant trouver les valeurs du bas.

Ainsi, pour la partie haute, nous avons appliqué le barème suivant :

Pour les 3 lignes du haut :

+ 1 point si les 3 valeurs du haut ont été trouvées (-0.5 points si une des valeurs ne correspondait pas)

Justification :

{ +1 point s'il y avait une justification avec équations ou une justification claire en langage naturel
Ou

+0.5 point si la justification relatait de l'essai – réajustement

Pour le bas :

+ 3 points si toutes les valeurs ont été trouvées

{ -0,5 point si 1 valeur fausse
-1 point si 2 valeurs fausses
Si plus de fautes, à discuter

Justification :

{ +2 points si justification avec équation ou avec essais – réajustements explicités (même non abouti)
+ 0,5 points si la justification n'est pas claire ou incomplète

4. Les différents types de raisonnements rencontrés

Les différents types de raisonnements rencontrés sont le tâtonnement/essais/erreurs ainsi que la mise en équation avec résolution algébrique. Un élève a résolu les équations avec la calculatrice et non pas à la main.

5. Les erreurs les plus fréquentes

L'erreur la plus fréquente a été l'absence de justification, ou simplement une vérification des calculs à la suite d'essai-réajustements. La partie basse de la pyramide a été plus difficilement réussie. Certains l'ont rempli à moitié, mais en considérant un côté indépendamment de l'autre. La pyramide est construite de telle manière que les élèves ont trouvé des propriétés qui sont vraies pour cette pyramide, mais pas de manière générale (53-47 pouvait donner le 6 de la première ligne, ou encore $94+53=147$ et $182-147=35$, qui était la case à droite de la deuxième ligne). De plus, certains élèves n'ont pas réussi à aboutir à la résolution de l'équation.

6. Copies remarquables

Belle résolution, correcte

Toute trace de recherche sera prise en compte.

Soit 182 au sommet :

$$182 = a + b$$

$$182 = 47 + 53 + 2c$$

donc $c = (182 - (47 + 53)) \div 2$
 $= 41$
 $a = 41 + 47$
 $= 88$
 $b = 41 + 53$
 $= 94$

Si $d = 20 \rightarrow$ le résultat n'est pas cohérent car $(j + 23) < g$
 donc $d > 20$

Si $d = 30 \rightarrow$ résultat pas cohérent car $(j + 23) > g$
 donc $d < 30$

Si $d = 25 \rightarrow$ résultat pas cohérent car $(j + 23) > g$
 donc $d < 25$

Si $d = 24 \rightarrow$ résultat cohérent !

L'élève a commencé par une résolution algébrique pour trouver 41. Ensuite, il a continué son raisonnement avec une résolution par essais-réajustements. Toutefois, les essais-réajustements sont justifiés de manière concise et précise.

Résolution originale (à la calculatrice)

Toute trace de recherche sera prise en compte dans la correction.

On suppose le 17 par z , 6 par y et 12 par x .

$$47 = 7 + 2z + y$$

$$41 = 2z + y$$

$$53 = 2x + y + 23$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = 30$$

Nous résolvons les équations à l'aide de la calculatrice et trouvons :

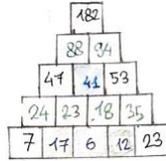
$$z = 17$$

$$y = 6$$

$$x = 12$$

Cette copie est intéressante car c'est la seule (que nous avons vue) dans laquelle les élèves ont utilisé la calculatrice pour résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues

Belle résolution utilisant des équations et de l'essai-réajustement



On cherche la valeur de la case bleue (inconnue nommée x):

$$\begin{aligned} (47+x) + (53+x) &= 182 \\ -47 \downarrow & \\ x + (53+x) &= 85 \\ -53 \downarrow & \\ 2x &= 32 \\ \div 2 & \\ x &= 16 \end{aligned}$$

On cherche les valeurs des cases rouge (inconnue n), orange (inconnue y) et vert (inconnue z):

$$\begin{aligned} 47 &= (7+y) + (18+n) & 53 &= (23+z) + (12+n) \\ -7 \downarrow & & -23 \downarrow & \\ 40 &= 2y + n & 30 &= 2z + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } n &= 40 - 2y = 30 - 2z & \text{Or } 40 - 2 \times 17 &= 40 - 20 = 20 & \text{Donc } n &= 20 \\ & & 30 - 2 \times 12 &= 30 - 24 = 6 & & \\ & & & & & \end{aligned}$$

Maintenant, à partir de ces valeurs on peut calculer toutes les autres

$47 + 16 = 63$ $63 + 19 = 82$ $41 + 19 = 60$ $60 + 23 = 83$ $53 + 19 = 72$ $72 + 10 = 82$
 $24 + 23 = 47$ $23 + 18 = 41$ $18 + 35 = 53$ $18 + 35 = 53$

Dans cette copie, la première partie a été résolue grâce à une résolution d'équation. Pour la deuxième partie, l'intention était une résolution d'équation, mais la finalité a été de l'essai-réajustement.

Résolution par essai-erreur chanceuse

Supposons que les deux cases en dessous de 182 sont les mêmes nombres, donc la moitié de 182.

$\frac{182}{2} = 91$ On teste 91. A l'aide de cette valeur, nous pouvons trouver la case entre 47 et 53 en les soustrayant de 91 et en faisant la moyenne des deux résultats.

$91 - 47 = 44$ $91 - 53 = 38$ $\frac{44+38}{2} = 41$ On teste 41.

Pour trouver les deux cases en dessous de 182, on additionne simplement les cases 47 et 41 ainsi que 41 et 53.

$47 + 41 = 88$ $41 + 53 = 94$ On teste $88 + 94 = 182$.

Supposons que les deux cases en dessous de 47 sont les mêmes nombres, donc la moitié de 47.

$\frac{47}{2} = 23,5$. A l'aide de cette valeur, on peut compléter les deux cases en dessous de 47, 23,5 ou 24 car $23,5 \times 2 = 23 + 24$.

Pour les dernières cases manquantes, nous suivons une logique car nous avons à chaque fois deux valeurs sur les bords, d'une addition.

$24 - 7 = 17$ $23 - 17 = 6$ $41 - 23 = 18$ $18 - 6 = 12$ $12 + 23 = 35$

De nombreux élèves ont procédé par essai-erreur en prenant 24 et 23 comme première tentative pour les cases de gauche. En effet, comme $47/2=23,5$, ils ont directement choisi 23 et 24 pour réajuster par la suite. Or, ils n'ont pas eu de réajustements à faire car ces valeurs sont déjà bonnes.

Résolution purement algébrique

modèle finale

282
47 53
47 46 53
24 24 24 23
2 2 2 2 23

pour trouver le nombre entre les cases 47 et 53 on pose l'équation suivante : avec x le nombre entre les cases 47 et 53

282
47 53
47 46 53

$$47 + x + 53 + x = 182$$

$$100 + 2x = 182$$

$$2x = 82$$

$$x = 41$$

on peut ainsi trouver les nombres du dessus

$$47 + 41 = 88$$

$$41 + 53 = 94$$

47	46	53
24	24	24
2	2	2

on peut écrire en fonction de x, y, z

$$7 + 2x + 4 = 47$$

$$x + 2y + z = 46$$

$$y + z + z + 23 = 53$$

On trouve ainsi :

$$\begin{cases} 2x + 4 = 40 \\ x + 2y + z = 46 \\ y + 2z = 30 \end{cases}$$

$$2x + 4 - (y + 2z) = 40 - 30$$

$$2x - 2z = 10$$

$$x - z = 5$$

$$z = x - 5$$

Ces élèves ont parfaitement résolu le système d'équations algébriquement.

On remplace dans le système z par $x-5$

$$\begin{cases} 2x + 4 = 40 \\ x + 2y + z = 46 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40 = 2x + 4 \\ 46 = 2x + 2y \end{cases}$$

$$46 - 40 = 2x + 2y - (2x + 4)$$

$$6 = 2x + 2y - 2x - 4$$

$$6 = 2y$$

On remplace la valeur de y dans l'équation

$$40 = 2x + 4$$

$$40 = 2x + 6$$

$$34 = 2x$$

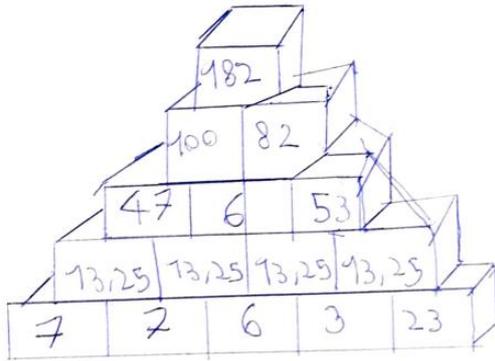
$$17 = x$$

On sait que $z = x - 5$
donc $z = 12$

$$x = 17 ; y = 6 ; z = 12$$

On peut donc compléter la pyramide voir modèle finale

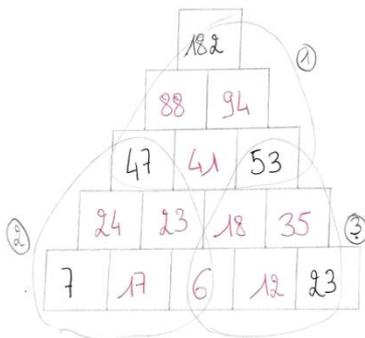
Erreur de compréhension (présence de nombres décimaux)



Mauvaise compréhension de l'énoncé qui amène à une pyramide complètement fautive.

Erreur originale

Toute trace de recherche sera prise en compte.



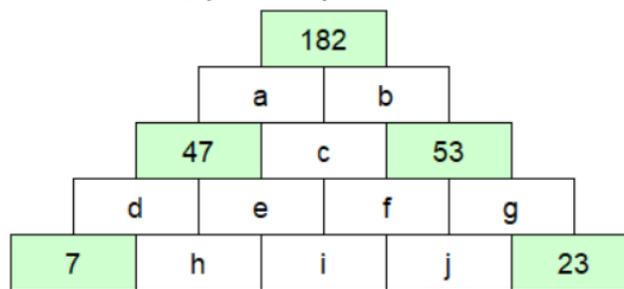
$$\begin{array}{lll}
 47+53=100 & \textcircled{1} & 53-47=6 \\
 182-100=82 & & 7+6=13 \\
 82 \div 2 = 41 & & 47-13=34 \\
 41+47=88 & & 34 \div 2 = 17 \\
 53+41=94 & & 7+17=24 \\
 94+88=182 & & 17+6=23 \\
 & & 23+24=47 \\
 & & \textcircled{2} \quad 23+6=29 \\
 & & 53-29=24 \\
 & & 24 \div 2 = 12 \\
 & & 6+12=18 \\
 & & 12+23=35 \\
 & & 35+18=53 \\
 & & \textcircled{3}
 \end{array}$$

La première partie pour trouver la case correspondant à 41 est correcte.

Cependant, à partir de la deuxième partie, on ne sait pas comment l'élève a trouvé le '6'.

Proposition de résolution a priori :

Mise en équation : Nommons chaque brique par une inconnue



D'après l'énoncé : « chaque nombre est la somme des nombres inscrits sur les deux briques situées juste en dessous »

Premières équations : $182 = a + b$ $a = 47 + c$ $b = 53 + c$

par remplacement : $182 = 47 + c + 53 + c = 100 + 2 \times c$

d'où $2 \times c = 182 - 100 = 82$ $c = 41$

en remplaçant la valeur de c dans les autres équations, on obtient :

$a = 47 + 41 = 88$ $a = 88$ $b = 53 + 41 = 94$ $b = 94$

Equations suivantes : $47 = d + e$ $41 = e + f$ $53 = f + g$

$d = 7 + h$ $e = h + i$ $f = i + j$ $g = j + 23$

par remplacement : $47 = 7 + h + h + i = 7 + 2 \times h + i$ donc $2 \times h = 47 - 7 - i = 40 - i$

donc $h = \frac{1}{2} \times (40 - i) = 20 - \frac{1}{2} \times i$

$53 = i + j + j + 23 = i + 2 \times j + 23$ donc $2 \times j = 53 - 23 - i = 30 - i$

donc $j = \frac{1}{2} \times (30 - i) = 15 - \frac{1}{2} \times i$

$41 = h + i + i + j = h + 2 \times i + j$

donc $41 = (20 - \frac{1}{2} \times i) + 2 \times i + (15 - \frac{1}{2} \times i)$

$41 = 20 + 15 - \frac{1}{2} \times i + 2 \times i - \frac{1}{2} \times i$

$41 = 35 + i$

donc $i = 41 - 35 = 6$ $i = 6$

en remplaçant la valeur de i dans les précédentes équations, on obtient :

$h = 20 - \frac{1}{2} \times 6 = 20 - 3 = 17$ $h = 17$

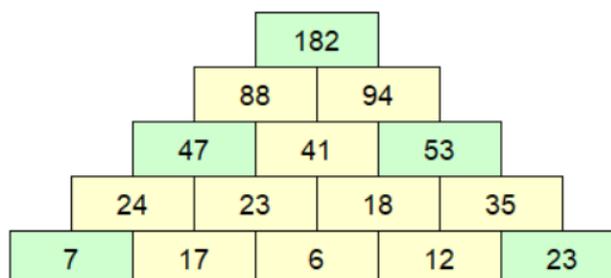
$j = 15 - \frac{1}{2} \times 6 = 15 - 3 = 12$ $j = 12$

et enfin $d = 7 + h = 7 + 17 = 24$ $d = 24$

$e = h + i = 17 + 6 = 23$ $e = 23$

$f = i + j = 6 + 12 = 18$ $f = 18$

$g = j + 23 = 12 + 23 = 35$ $g = 35$



7. Difficultés éventuelles lors de la correction

Il était parfois compliqué de différencier une bonne rédaction d'une justification par essais erreurs, ou encore de certaines autres justifications qui étaient incomplètes.

8. Mots clés

Mots clés en lien avec le thème : <ul style="list-style-type: none">- Ecritures littérales- Equations- Nombres et numération- Logique
Mots clés en lien avec les compétences : <ul style="list-style-type: none">- Chercher- Calculer- Communiquer- Raisonner
Mots clés en lien avec les principaux éléments mathématiques travaillés : <ul style="list-style-type: none">- Calcul- Calcul mental- Nombres entiers- Calcul littéral- Soustraction- Addition- Division- Équation- Logique- Système d'équations
Mots clés en lien avec les capacités : <ul style="list-style-type: none">- Contrôler la vraisemblance d'un résultat- Mettre un problème en équation- Résoudre algébriquement des équations- Tester, essayer plusieurs pistes de résolutions- Mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs démarches- Justifier sa démarche en s'appuyant sur des résultats établis et en argumentant- Calculer en utilisant le langage algébrique- Calculer avec des nombres de manières exacte (ou approchée)- Contrôler la vraisemblance de ses résultats- Expliquer sa démarche, son raisonnement, un calcul
Mots clés en lien avec les tâches de l'élève : <ul style="list-style-type: none">- Essai-erreur, tâtonnement- Méthode de fausse position- Rédaction, justification, explication- Calcul- Respect d'une contrainte, règle- Coopérer, travailler ensemble- Raisonnement logico-déductif

9. Remarque générale et autres commentaires des correcteurs

Globalement, l'exercice a été résolu plus par essais erreurs que par une résolution algébrique. La justification est souvent absente. La première partie pouvait être résolue assez facilement par tâtonnement ou algébriquement. Malgré cela, on retrouve quelques réponses fausses. La seconde partie est plus compliquée à résoudre, et même impossible en classe de 3ème si on pose un système d'équation à trois inconnues, ou si on ne voit pas le lien entre les nombres cherchés, auquel cas les élèves introduisent sept inconnues.